Z U R S T A B I L I T Ä T

V O N

" C O M P O U N D J E T S "

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes
vorgelegt von

B e n n o S c h o r r

aus Bildstock

Saarbrücken, 1964

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juni 1964

Der Dekan: Prof. Dr. G. de LATTIN

Berichterstatter: Prof. Dr. H. SÖHNGEN

Prof. Dr. D. PUPPE

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

V o r w o r t

Die vorliegende Arbeit entstand bei der Untersuchung der Stabilität eines senkrechten Strahls aus einem Rohr auf eine ebene Platte. Beim näheren Studium der Literatur ergab sich, daß das wesentlich einfachere Problem eines Strahls in einem ruhenden oder strömenden Medium unter Berücksichtigung des Rohres, aus welchem der Strahl austritt, noch nicht gelöst ist. Die vorliegende Arbeit soll darum als mathematische Vorbereitung zur Lösung dieses Problems gedacht sein.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. SÖHNGEN meinen aufrichtigen Dank aussprechen für dieses entwicklungsfähige Thema und für die Hinweise, die er mir bei der Bearbeitung gegeben hat.

Der Verfasser

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

		Seite
	Einleitung	1
§ 1	Mathematische Formulierung des Problems	6
§ 2	Das Neumannproblem	14
§ 3	Formale Lösung des Neumannproblems	15
§ 4	Verifikation der Lösung des Neumann-problems	25
§ 5	Lösung von "Problem A"	32
§ 6	Formulierung von "Problem B"	34
§ 7	Das "Problem B" im Bildraum	37
§ 8	Eigenschaften einiger Funktionen	41
§ 9	Die Lösung der Gleichung (B)	47
§ 10	Die Urbilder von $h^+(u,v)$ und $h_o^+(u,v)$	53
§ 11	Verifikation der Lösung von "Problem B"	58
	Schlußbemerkung	65
	Anhang	66
	Literaturangaben	75

E I N L E I T U N G.

"Compound Jets" bestehen aus Gasstrahlen, die in einen Gasstrom eingebettet sind. Mehrere Autoren haben sich mit solchen Strahlen schon befaßt (s. Literaturverzeichnis). Die Stabilität solcher Strahle unter Berücksichtigung der Anwesenheit der Düse, aus welcher die Gase ausströmen, scheint noch niemand untersucht zu haben. Es liegen meines Wissens bis jetzt erst ein paar Arbeiten über die Stabilität einer Wirbelschicht vor, worauf man, wie wir später sehen werden, für ideale Medien dieses Problem zurückführt. So haben LANDAU [8] , 1944, HATANAKA [6] , 1949 und PAI [14] 1954 das Problem behandelt, daß zwei verschiedene ideale, kompressible Medien mit verschiedenen konstanten Grundgeschwindigkeiten längs einer Ebene (Wirbelschicht) aneinander vorbeiströmen. Sie untersuchten in einer auf Linearisierung beruhenden Theorie mit Hilfe des üblichen Exponentialansatzes die Stabilität dieser Wirbelschicht und stellten für einen Spezialfall ein Kriterium auf. 1958 hat MILES [12] das gleiche Problem wieder aufgegriffen und mit Hilfe eines Speziellen Anfangs-Randwertproblems gezeigt, daß die Ergebnisse seiner Vorgänger nicht in allen Punkten korrekt sind. Damit hat er zugleich gezeigt, daß man die Methode des Exponentialansatzes nicht in jedem Falle anwenden kann. Das Gleiche hat auch CASE [4] , 1962 an mehreren Beispielen gezeigt. Mit dem Problem der Stabilität einer ebenen Wirbelschicht im inkompressiblen Falle haben sich HELMHOLTZ und RAYLEIGH befaßt. (s. LAMB [7] , § 232)

Wir sehen damit, daß einmal überhaupt keine theoretische Untersuchung vorliegt, in der die Düse, aus welcher der Strahl austritt, berücksichtigt wird, und daß zum andern der herkömmlichen Ansatzmethode ein gewisser Mangel anhaftet. Aus diesem Grunde soll in der vorliegenden Arbeit zunächst an einem einfachen Modell für den inkompressiblen Fall eine mathematische Methode gefunden werden, die einmal die Düse berücksichtigt, weiter ein allgemeines Anfangs-Randwertproblem löst und schließlich gewisse Aussichten hat, auch auf den kompressiblen Fall übertragbar zu sein.

Wir wollen zunächst erläutern, wie wir zu dem Problem gelangen, das wir explizit behandeln wollen.

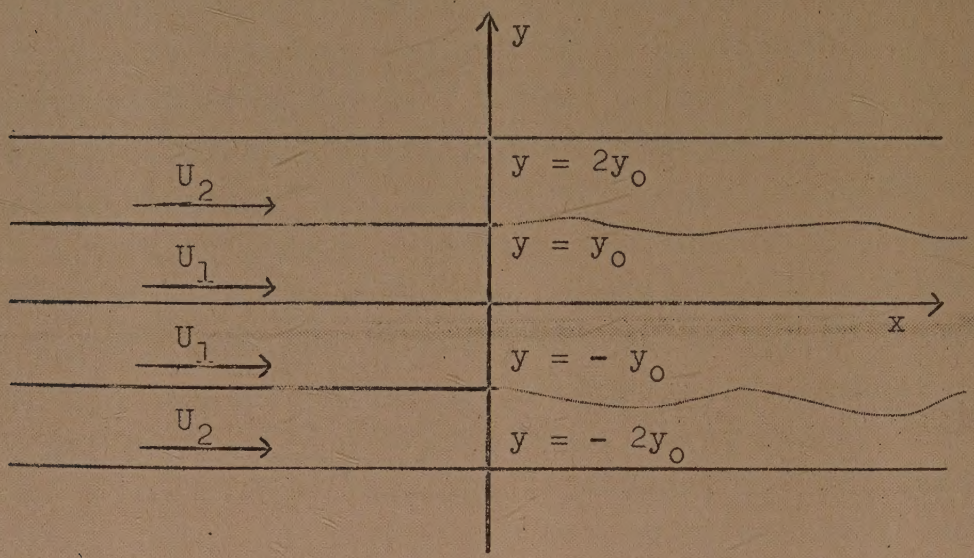

Bild 1 (z-Achse senkrecht zur Papierebene)

Aus einer Düse (s. Bild 1) ströme ein inkompressibles, ideales Medium mit der konstanten Grundgeschwindigkeit U_1. Bei $y = \pm 2y_o$ sei je eine ebene, starre Wand. In den Gebieten zwischen $y = y_o$ und $y = 2y_o$ bzw. $y = - y_o$ und $y = - 2y_o$ ströme ein anderes inkompressibles, ideales Medium mit der konstanten Geschwindigkeit U_2 in Richtung der positiven x-Achse.

ϱ_j ($j = 1,2$) seien die konstanten Dichten. In beiden Medien herrsche der gleiche Druck. Dann liegen hinter den Kanten der Düse, welche wir aus zwei ebenen, starren und unendlich dünnen Platten bestehend annehmen, bei $y = \pm y_o$ je eine ebene Wirbelschicht mit der konstanten Wirbeldichte $U_2 - U_1$. Es gilt nun deren Stabilität zu untersuchen.

Nehmen wir an, daß wir später unser betrachtetes System so stören werden, daß bzgl. der (x,z)-Ebene Symmetrie herrscht, so wirkt die (x,z)-Ebene wie eine starre Wand, und wir können uns auf folgendes beschränken.

Wir denken uns, wie in Bild 2, im (x,z,y)-Raum in der (x,z)-Ebene für $-\infty < x \leq o$ und $-\infty < z < +\infty$ eine ebene, starre und unendlich dünne Platte. Bei $y = \pm y_o$ sei je eine ebene, starre Wand. Für $- y_o < y < o$ ströme ein inkompres-

sibles, ideales Medium mit der konstanten Geschwindigkeit U_2, für $o < y < y_o$ ein anderes mit der Geschwindigkeit U_1 in Richtung der positiven x-Achse. Wir fragen dann nach der Stabilität der bei $y = o$, $x > o$, $-\infty < z < +\infty$ liegenden Wirbelschicht.

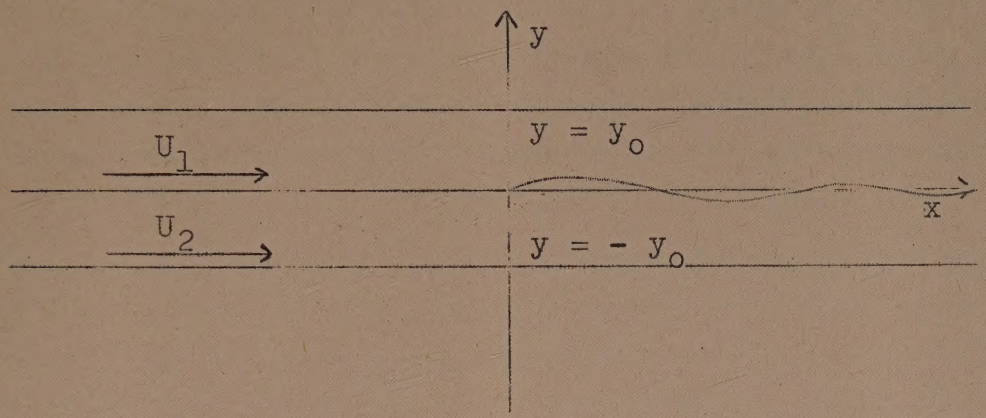

Bild 2. (z-Achse senkrecht zur Papierebene)

Wir wollen nun erörtern, was wir unter dem Begriff "Stabilität" verstehen wollen.

Im allgemeinen (s. LIN [lo]) geht man bei der hydrodynamischen Stabilitätsrechnung von der Voraussetzung aus, daß man dem betrachteten System "kleine" Störungen überlagert derart, daß man die auftretenden nichtlinearen Gleichungen linearisieren kann. Man behandelt dann weiter nur solche Probleme, die bzgl. der Zeit und zweier oder einer Variablen des Ortes - jenachdem man es mit einem drei- oder zweidimensionalen Problem zu tun hat - einen Exponentialansatz zulassen. Hiermit führt man das Problem auf ein Eigenwertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung zurück. In die Eigenwertgleichung gehen die Parameter ein, die in den Exponenten des Ansatzes stehen. Treten nun solche Parameterwerte als Lösung der Eigenwertgleichung auf, daß mit wachsender Variablen der zugehörige Exponentialfaktor wächst, so nennt man das betrachtete System "instabil", gibt es nur solche Parameterwerte, die ein exponentielles Abklingen bei wachsender Variable bewirken, so heißt das System "stabil".

Im Gegensatz zu dieser Ansatzmethode werden wir hier einen andern Weg gehen.

Wir werden ein ziemlich allgemeines Anfangs-Randwertproblem formulieren und lösen. Es gibt dabei zwei verschiedene Möglichkeiten.

I. Wir denken uns zum Zeitpunkt $t = o$ die Wirbelfläche aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und untersuchen, wie sich die Wirbelfläche für große t verhält.

II. Vom Zeitpunkt $t = o$ an denken wir uns in unserem System eine Störquelle angebracht derart, daß wir auf der halbunendlichen Platte Normalgeschwindigkeiten vorgeben. Wir untersuchen dann, wie sich unsere Wirbelfläche für große x und für $t > o$ verhält.

Bei der Durchrechnung dieser beiden Probleme ergibt sich, daß beim Problem I an der Hinterkante der halbunendlichen Platte in Druck und Geschwindigkeit Wurzelsingularitäten auftreten. Diese Singularität haben schon mehrere Autoren bei ähnlichen Problemen beobachtet. (s. LENNOX & PACK [9]). Sie ist physikalisch nicht sinnvoll. Bei Problem II tritt diese Singularität nicht auf, aber es ergibt sich im Falle $U_1 \neq U_2$ folgende Schwierigkeit. Denken wir uns eine möglichst "weich" beginnende Störquelle, d.h. im Zeitpunkt $t = o$ sollen die Anfangsstörgeschwindigkeit und die Störbeschleunigung verschwinden, dann ergibt sich bei der Durchrechnung, daß die Wirbelfläche notwendig zum Zeitpunkt $t = o$ schon aus ihrer Ruhelage ausgelenkt sein muß, sonst hat das Problem nur die triviale Lösung. Dies ist wiederum physikalisch nicht sinnvoll und deutet darauf hin, daß man im Falle $U_1 \neq U_2$ die Bedingung des glatten Abflusses an der Hinterkante nicht stellen kann. Dieser Punkt soll aber in dieser Arbeit nicht erörtert werden, sondern soll später in einer gesonderten Betrachtung untersucht werden.

Die vorliegende Arbeit soll zunächst die rein mathematisch auftretenden Probleme behandeln und nur am Rande (für $U_1 = U_2$) das Stabilitätsproblem streifen. Für den Fall, daß $U_1 \neq U_2$ ist, kann dies erst näher untersucht werden, wenn die Frage nach der Hinterkantenbedingung geklärt ist.

Das Problem II ist das mathematisch allgemeinere. Aus diesem Grunde werden wir hier nur dieses Problem behandeln. Das Problem I läßt sich mit den gleichen Methoden analog lösen.

Wir werden bei unseren Rechnungen auf ein gemischtes Anfangs-Randwertproblem mit teilweise freiem Rand stoßen. Gemischt deshalb, weil für $y = 0$ und $-\infty < x < 0$ bzw. $0 < x < \infty$ verschiedene Randbedingungen gegeben sind. Der teilweise freie Rand rührt von der unbekannten Wirbelschicht her. Es werden drei unbekannte Funktionen auftreten, zwei Geschwindigkeitspotentiale und eine Funktion, welche die Wirbelschicht beschreibt. Die beiden Potentiale werden durch Lösung eines Neumannproblems bestimmt, während die dritte Funktion zu einer partiellen, inhomogenen Integro-Differentialgleichung erster Art führen wird. Diese Gleichung werden wir mit Hilfe einer zweidimensionalen Laplacetransformation und dem WIENER-HOPF-Verfahren lösen. Es scheint, daß eine derartige Aufgabe in der Literatur noch nicht behandelt wurde, und ebenso, daß das WIENER-HOPF-Verfahren in Verbindung mit einer zweidimensionalen Laplacetransformation, wie es hier verwandt werden wird, noch nicht angewandt wurde.

§ 1 Mathematische Formulierung des Problems.

Im (x',z',y')-Raum mögen bei $y' = \pm y'_0$ je eine ebene, unendlich ausgedehnte, starre Wand parallel zur (x',y')-Ebene liegen. Eine halbunendliche starre, ebene Platte liege in der (x',z')-Ebene für $x' \leq o$. Die Dicke dieser Platte sei vernachlässigbar. (s. Bild 2)

In den beiden Gebieten

$$G'_1 = \{ (x',z',y') \,/\, -\infty < x',\ z' < \infty,\ o < y' < y'_0 \},$$
$$G'_2 = \{ (x',z',y') \,/\, -\infty < x',\ z' < \infty,\ -y'_0 < y' < o \}, \tag{1.1}$$

mögen je ein inkompressibles, ideales Medium mit den konstanten Geschwindigkeiten U'_j (j=1,2) in Richtung der positiven x'-Achse strömen. ϱ_j seien die konstanten Dichten. In beiden Medien soll der gleiche konstante Druck herrschen.

Vom Zeitpunkt t'= o an denken wir uns Störungen angebracht derart, daß wir auf der halbunendlichen Platte Normalgeschwindigkeiten durch eine Funktion F'(x',z',y') vorgeben. Wir nehmen an, daß diese Störungen zu Geschwindigkeitsfeldern führen, die ein Potential besitzen. Weiter seien alle auftretenden Störgrößen so "klein", daß wir linearisiert rechnen dürfen. Bezeichnen wir die Potentiale der Störgeschwindigkeiten mit $\phi'_j(x',z',y',t')$ und die Auslenkung der Wirbelfläche aus ihrer Ruhelage mit H'(x',z',t'), so sind diese Größen gesucht. Die Gesamtgeschwindigkeitsfelder ergeben sich dann als:

$$\mathfrak{w}'_j = U'_j \mathfrak{e}'_1 + \operatorname{grad} \phi'_j(x',z',y',t'), \tag{1.2}$$

wobei $\mathfrak{e}'_1$ der Einheitsvektor in x'-Richtung ist.

Die Geschwindigkeitspotentiale müssen wegen der Kontinuitätsgleichung der Laplaceschen Differentialgleichung genügen:

$$\Delta \phi'_j(x',z',y',t') = o. \tag{1.3}$$

Als Randbedingungen zu den Lösungen von (1.3) müssen wir fordern, daß an den Wänden die Normalgeschwindigkeiten verschwinden, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial y'}\phi_j' = o, \quad y' = \pm y_o', \quad -\infty < x', z' < \infty, \quad t' \geqslant o \tag{1.4}$$

Auf der halbunendlichen Platte ist in G_j' die Normalgeschwindigkeit gegeben durch:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\phi_1' = F'(x',z',t') \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\phi_2' = F'(x',z',t') \tag{1.6}$$

für $y' = o$, $x' \leqslant o$, $-\infty < z' < \infty$, $t' \geqslant o$.

Längs der Wirbelschicht sind zwei Bedingungen zu erfüllen: Eine kinematische und eine dynamische.

Die kinematische Bedingung fordert, daß die Wirbelfläche Teilchenfläche ist. Mathematisch bedeutet dies folgendes. Wenn $M'(x',z',y',t') = o$ die Gleichung der Fläche ist, so muß längs der Fläche die substantielle Ableitung verschwinden:

$$\frac{d}{dt'}M' = \frac{\partial}{\partial t'}M' + \dot{x}'\frac{\partial}{\partial x'}M' + \dot{z}'\frac{\partial}{\partial z'}M' + \dot{y}'\frac{\partial}{\partial y'}M'$$

$$= o. \tag{1.7}$$

In unserem Falle ist $M' \equiv y' - H'(x',z',t') = o$, und wir erhalten aus (1.7):

$$\dot{y}' = \frac{\partial}{\partial t'}H' + \dot{x}'\frac{\partial}{\partial x'}H' + \dot{z}'\frac{\partial}{\partial z'}H'. \tag{1.8}$$

Längs der Fläche gilt weiter:

$$\dot{y}' = \frac{\partial}{\partial y'}\phi_j'(x',z',H'(x',z',t'),t'), \tag{1.9}$$

$$\dot{x}' = U_j' + \frac{\partial}{\partial x'}\phi_j'(x',z',H'(x',z',t'),t'), \tag{1.10}$$

$$\dot{z}' = \frac{\partial}{\partial z'}\phi_j'(x',z',H'(x',z',t'),t'). \tag{1.11}$$

Setzt man (1.9) bis (1.11) in (1.8) ein und vernachlässigt die Glieder zweiter und höherer Ordnung, so ergibt sich die Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\phi_j' = \left(U_j'\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right)H'(x',z',t') \tag{1.12}$$

für $x' > o$, $-\infty < z' < \infty$, $t' \geqslant o$.

Die dynamische Bedingung verlangt die Kontinuität des Gesamtdruckes längs der Wirbelfläche, d.h. hier Kontinuität des Störddruckes, da im ungestörten Zustand der Druck überall gleich sein sollte. Der Störddruck ergibt sich bekanntlich in linearisierter Form als:

$$p'_j(x',z',y',t') = -\varrho'_j\left(U'_j\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\phi'_j, \qquad (1.13)$$

wobei ϱ'_j die jeweilige (konstante) Dichte ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich dann die linearisierte Druckbedingung:

$$\varrho'_2\left(U'_2\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\phi'_2 - \varrho'_1\left(U'_1\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\phi'_1 = o \qquad (1.14$$

für $y' = o$, $x' > o$, $-\infty < z' < \infty$, $t' \geqslant o$.

Um das Problem auf ein zweidimensionales Problem zu reduzieren, wollen wir nur solche Störungen zulassen, die bzgl. z' eine spezielle cos(k'z')-Abhängigkeit haben. Wir setzen:

$$\phi'_j(x',z',y',t') = \phi^*_j(x',y',t').\cos(k'z'), \qquad (1.15)$$

$$F'(x',z',t') = F^*(x',t').\cos(k'z'), \qquad (1.16)$$

$$H'(x',z',t') = H^*(x',t').\cos(k'z'), \qquad (1.17)$$

wobei wir immer annehmen werden, daß $k' > o$ ist. $k' < o$ wird automatisch mitbehandelt, da der Kosinus eine gerade Funktion ist, und da sich ergeben wird, daß alle auftretenden Funktionen nur vom Betrag von k' abhängen werden. Den Fall $k' = o$ werden wir nicht behandeln, da er, wie wir in § 3 darauf hinweisen werden, methodisch nichts neues liefern wird. Er läßt sich aber auch nicht aus der Lösung für $k' > o$ durch Grenzübergang gewinnen, wie wir sehen werden.

Wir führen neue Koordinaten ein durch:

$$x' = y'_o.x, \quad z' = z, \quad y' = y'_o.y, \quad t' = t. \qquad (1.18)$$

Weiter seien dann:

$$\phi'_j(x',z',y',t') = \phi_j(x,y,t).\cos(k'z), \tag{1.19}$$

$$F'(x',z',t') = F(x,t).\cos(k'z), \tag{1.20}$$

$$H'(x',z',t') = H(x,t).\cos(k'z), \tag{1.21}$$

$$k' = \frac{k}{y'_o}, \tag{1.22}$$

$$U'_j = y'_o.U_j, \tag{1.23}$$

$$\varrho'_j = \varrho_j. \tag{1.24}$$

Gehen wir mit diesen neuen Bezeichnungen und den neuen Koordinaten in die Gleichungen (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.12) und (1.14) ein, so ergibt sich für $t \geqslant o$:

$$(\Delta - k^2)\phi_j(x,y,t) = o, \quad -\infty < x < \infty, \quad o < y < 1 \text{ bzw. } -1 < y < o \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi_j = o, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = \pm 1, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi_j = \begin{cases} F(x,t) & x < o,\ y = o \\ (U_j\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})H(x,t) & x > o,\ y = o \end{cases} \tag{1.27}$$

$$\varrho_2(U_2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})\phi_2 - \varrho_1(U_1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})\phi_1 = o, \quad x > o, \quad y = o \tag{1.28}$$

Bevor wir unser Problem endgültig mathematisch formulieren können, müssen wir noch angeben, aus welchen Klassen von Funktionen unsere gesuchten Funktionen stammen sollen. Dazu zunächst einige Worte.

Es wird sich ergeben, daß im Rahmen unserer Lösungsmethode nur dann eine Lösung existiert, wenn die Inhomogenität $F(x,t)$ für jedes feste $x \leqslant o$ bzgl. t in einen noch näher festzulegenden Winkelraum analytisch fortgesetzt werden kann. Dies hängt damit zusammen, daß die Gleichung, die wir zur Bestimmung von $H(x,t)$ erhalten werden, einen elliptischen Differentialoperator enthält.

Da wir von vornherein nicht wissen, ob unsere Lösungsfunk-

tionen für $x > o$ - d.h. wo die Wirbelschicht liegt - und für $t > o$ mit wachsenden Variablen stark anwachsen, wollen wir in diesem Raum für x gegen ∞ und t gegen ∞ exponentielles Anwachsen zulassen. Für x gegen $-\infty$ dürfen wir annehmen, was man sofort einsieht, wenn man eine Entwicklung nach Eigenlösungen des Problems macht, daß die Geschwindigkeitspotentiale exponentiell abklingen, wenn wir voraussetzen, daß die vorgegebene Störung $F(x,t)$ ein solches Verhalten für jedes feste $t \geq o$ hat. Da wir aber bei Lösungen, die für $x \longrightarrow \infty$ über alle Grenzen wachsen können, das übliche Verfahren über das Energieintegral zum Beweis der Eindeutigkeit der Lösung nicht anwenden können, werden wir auch noch für die auftretenden partiellen Ableitungen gewisse Bedingungen für große $|x|$ und große t stellen müssen, die uns erlauben, mit Hilfe einer zweidimensionalen Laplacetransformation, den Eindeutigkeitsbeweis zusammen mit der Konstruktion der Lösung zu erhalten.

Bzgl. der Hinterkante der halbunendlichen Platte wollen wir fordern, daß grad ϕ_j dort endlich bleibt. Es zeigt sich, daß dies gleichbedeutend mit der Forderung ist, daß

$$H(o,t) = \frac{\partial}{\partial x} H(o,t) = o.$$

Bevor wir die Funktionenklassen exakt definieren, führen wir noch folgende Bezeichnung ein:

W_o sei der Winkelraum in der komplexen t-Ebene, der $Re(t) > o$ enthält und von den beiden Strahlen gebildet wird, die von $t = o$ zu den komplexen Punkten $t = a$ bzw. $t = \bar{a}$ führen. Die komplexe Konstante

$$a = -\alpha_o + i\beta_o, \quad \alpha_o > o, \quad \beta_o > o \qquad (1.29)$$

wird in § 9 eingeführt werden. Mit $\overline{W}_o$ bezeichnen wir den Winkelraum zusammen mit den Randstrahlen.

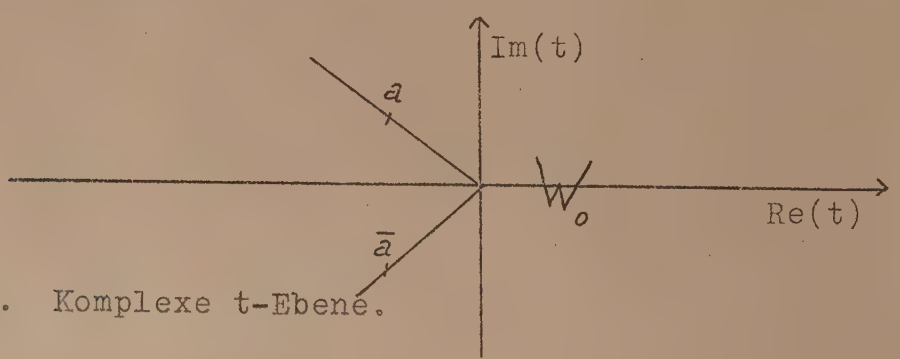

Bild 3. Komplexe t-Ebene.

Wir definieren:

Definition 1.

$\mathcal{F}$ sei die Klasse der Funktionen $F(x,t)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $F(x,t)$ ist definiert für $x \leqslant o$, $t \in \overline{W}_o$ und ist für reelle t sebst reellwertig.

(b) Bzgl. x ist $F(x,t)$ zweimal stetig differenzierbar.

(c) Bzgl. t sind $F(x,t)$, $F_x(x,t)$ und $F_{xx}(x,t)$ in W_o analytisch fortsetzbar. Auf den Randstrahlen von W_o ist $F(x,t)$ dreimal stetig differenzierbar nach t.

(d)
$$F(o,t) = F_x(o,t) = o, \quad t \in \overline{W}_o \tag{1.30}$$

$$F(x,o) = F_t(x,o) = o, \quad x \leqslant o, \tag{1.31}$$

(e) In $\overline{W}_o$ gilt für $F(x,t)$ und alle auftretenden partiellen Ableitungen

$$\left|F(x,t)\right| \leqslant C_o . e^{\beta x - \alpha \mathrm{Re}(t)}, \quad x \leqslant o, \; t \in \overline{W}_o \tag{1.32}$$

mit
$$o \leqslant \alpha \cdot \alpha_o < \beta < k \tag{1.33}$$

und der von $F(x,t)$ abhängigen Konstanten C_o.

Definition 2.

$\mathcal{K}_j$ sei die Klasse der Funktionen $\phi_j(x,y,t)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\phi_j(x,y,t)$ ist in

$$G_1 = \left\{ (x,y,t) \,/\, -\infty < x < \infty, \; o < y < 1, \; t \geqslant o \right\}$$

bzw.

$$G_2 = \left\{ (x,y,t) \,/\, -\infty < x < \infty, \; -1 < y < o, \; t \geqslant o \right\}$$

definiert und bzgl. x,y zweimal und bzgl. t einmal stetig differenzierbar (bzgl. t bis an den Rand)

(b) Für $y = o$ und $y = +1$ bzw. -1 ist $\phi_j(x,y,t)$ bzgl. x,y und t einmal stetig differenzierbar.

(c) Für jedes feste $t \geqslant o$ existieren die Integrale

$$\int_o^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_j(x,y,t) . e^{-ux-vy} \, dx dy , \tag{1.34}$$

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_j(x,y,t).e^{-ux-vy} dxdy \qquad (1.35)$$

absolut und gleichmäßig für alle u und v mit

$$o < \beta_1+\varepsilon \leq \mathrm{Re}(u) \leq \beta - \varepsilon < k, \; |v| \leq |v_o| < \infty, \qquad (1.36)$$

wobei $o \leq \beta_1 < \beta$ ist, und $\varepsilon > o$ so klein, daß $\beta_1 + \varepsilon < \beta - \varepsilon$ gilt. u und v sind komplexe Parameter, und v_o eine beliebige, feste, komplexe Zahl.

(d) Für jedes feste $t \geq o$ und alle y mit $o < y < 1$ bzw. $-1 < y < o$ gilt für ϕ_j und $\frac{\partial}{\partial x}\phi_j$:

$$\phi_j(x,y,t) = \begin{cases} O(e^{\beta x}) & x \longrightarrow -\infty \\ O(e^{\beta_1 x}) & x \longrightarrow \infty \end{cases} \qquad (1.37)_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi_j(x,y,t) = \begin{cases} O(e^{\beta x}) & x \longrightarrow -\infty \\ O(e^{\beta_1 x}) & x \longrightarrow \infty \end{cases} \qquad (1.37)_2$$

Definition 3.

$\mathfrak{H}$ sei die Klasse der Funktionen H(x,t) mit den folgenden Eigenschaften:

(a) H(x,t) ist für $x \geq o$, $t \geq o$ definiert und nach t zweimal stetig differenzierbar.

(b) Für $x > o$, $t \geq o$ ist H(x,t) nach x zweimal stetig differenzierbar und für $x = +o$, $t \geq o$ nach x einmal stetig differenzierbar.

(c) Für H, H_x, H_t, H_{xt} und H_{tt} gilt eine Abschätzung der Art

$$|H(x,t)| \leq C_1.e^{\beta_1 x + \delta t}, \quad x \geq o, \; t \geq o \qquad (1.38)$$

mit reellem δ, und einer nur von H(x,t) abhängigen Konstanten C_1.

(d) $$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x,t)\right| \leq \left(A_1 + \frac{A_2}{x^\eta}\right).e^{\beta_1 x + \delta t}, \quad x > o, \; t \geq o, \qquad (1.39)$$

mit $o \leq \eta < 1$ und den nur von H(x,t) abhängigen Konstanten A_1, A_2.

(e) $$H(o,t) = \frac{\partial}{\partial x} H(o,t) = o. \qquad (1.40)$$

Über die Wahl der Parameter α, β, β_1 und δ ist folgendes zu sagen. Die Ungleichung (1.33) wurde gefordert, weil sich später ergeben wird, daß für $U_1 = U_2$ $\beta_1 = \alpha \cdot \alpha_0$ gesetzt werden kann. $\beta_1 < \beta$ wurde gewählt, damit wir die Laplacetransformation anwenden können. Dabei brauchten wir z. B. nicht anzunehmen, daß $\beta < k$ ist. (Es zeigt sich aber, daß diese Wahl der Parameter für unser Problem hinreichend ist.) Der Parameter δ wird später gleich $-\alpha$ gesetzt werden dürfen.

Alle andern Bedingungen in Definition 1 bis 3 werden wir nicht im einzelnen erläutern, da ihre Bedeutung im Laufe der Rechnungen klar werden wird.

Wir können nun unser Problem, das wir mit "Problem P" bezeichnen wollen, vollständig formulieren.

Problem P

Gesucht sind die Funktionen $\phi_j(x,y,t) \in \mathfrak{G}_j$ und $H(x,t) \in \mathfrak{H}$, die für $t \geq 0$ den Gleichungen (1.25) bis (1.28) genügen, wobei $F(x,t) \in \mathfrak{F}$ ist.

Betrachtet man die Gleichungen (1.25) bis (1.27) und nimmt zunächst an, daß $H(x,t)$ gegeben ist, so wird durch diese Gleichungen in jedem Gebiet G_j für sich ein reines Neumannproblem zur Gleichung (1.25) definiert. Denkt man sich $\phi_j(x,y,t)$ als Lösung dieses Neumannproblems in Abhängigkeit von $H(x,t)$ gegeben, so liefert (1.28) eine Bestimmungsgleichung für $H(x,t)$. In dieser Weise werden wir unser "Problem P" aufspalten in ein"Problem A": Für $j = 1$ und 2 je ein Neumannproblem; und in ein "Problem B", welches durch die Gleichung (1.28) zur Bestimmung von $H(x,t)$ definiert wird und in § 6 noch genauer formuliert wird.

Um das Problem A zu lösen, werden wir im nächsten Paragraphen das Neumannproblem für das Gebiet G_1 allgemein behandeln.

§ 2 Das Neumannproblem.

Wir führen zunächst zwei weitere Funktionenklassen ein.

Definition 4.

$\mathfrak{K}_1^{(o)}$ sei die Klasse derjenigen Funktionen $\Psi(x,y)$, die entsteht, wenn man in der Klasse $\mathfrak{K}_1$ die Zeitabhängigkeit wegläßt.

Definition 5.

$\mathfrak{R}$ sei die Klasse der Funktionen $R(x)$, die für $x \neq o$ einmal stetig differenzierbar sind und folgenden Abschätzungen genügen:

$$|R(x)| \leq \begin{cases} C_2 . e^{\beta x} & x \leq o \\ C_2 . e^{\beta_1 x} & x \geq o \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$|R'(x)| \leq \begin{cases} (B_1 + \frac{B_2}{(-x)^{\gamma}}) . e^{\beta x} & x < o \\ (B_1 + \frac{B_2}{x^{\gamma}}) . e^{\beta_1 x} & x > o \end{cases} \qquad (2.2)$$

wobei die auftretenden Konstanten B_1, B_2 und C_2 nur von $R(x)$ abhängen und $o \leq \gamma < 1$ ist.

Wir wollen dann folgendes Problem lösen.

Neumannproblem.

Gesucht ist eine Funktion $\Psi(x,y) \in \mathfrak{K}_1^{(o)}$, die folgenden Bedingungen genügt:

$$(\Delta - k^2)\Psi(x,y) = o, \quad -\infty < x < \infty, \quad o < y < 1, \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi = o, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 1, \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi = R(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = o, \qquad (2.5)$$

wobei $R(x) \in \mathfrak{R}$ ist.

§ 3 Formale Lösung des Neumannproblems.

Wir wenden eine zweidimensionale Laplacetransformation an. Wir werden dabei mehrere Eigenschaften der eindimensionalen Laplacetransformation - sowohl der einseitigen wie der zweiseitigen - als bekannt voraussetzen.

Wir definieren

$$\psi(u,v) = \iint_G \Psi(x,y) \cdot e^{-ux - vy} dxdy, \tag{3.1}$$

wobei $G = \{ (x,y) / -\infty < x < \infty, \; 0 < y < 1 \}$ gilt.

Verstehen wir das Integral im Lebesgueschen Sinne, so ergibt sich sofort, da $\Psi(x,y) \in \mathcal{R}_1^{(0)}$ ist, daß das Integral für alle u und v mit

$$|v| \leq |v_0| < \infty, \quad \beta_1 + \varepsilon \leq \mathrm{Re}(u) \leq \beta - \varepsilon, \tag{3.2}$$

wobei v_0 beliebig ist, absolut und gleichmäßig konvergiert. Nach dem Satz von Fubini können wir das Integral als iteriertes Integral auffassen und dürfen die Integrationsreihenfolge vertauschen. Das heißt aber, wir können $\Psi(u,v)$ als zwei iterierte, eindimensionale Laplaceintegrale auffassen, die wir dann auch wieder iteriert rücktransformieren dürfen.

Seien

$$r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{-ux} dx, \quad \beta_1 < \mathrm{Re}(u) < \beta, \tag{3.3}$$

$$\overset{I}{\Psi}(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0) \cdot e^{-ux} dx, \quad \beta_1 < \mathrm{Re}(u) < \beta, \tag{3.4}$$

$$\overset{I}{\Psi}(u,1) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,1) \cdot e^{-ux} dx, \quad \beta_1 < \mathrm{Re}(u) < \beta, \tag{3.5}$$

so erhalten wir leicht durch partielle Integration:

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,y) \cdot e^{-ux - vy} dxdy = u^2 \psi(u,v) \tag{3.6}$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\psi(x,y)\cdot e^{-ux-vy}\,dx\,dy = v^2\,\psi(u,v) - r(u) + v\,\overset{I}{\psi}(u,0) + v\cdot e^{-v}\,\overset{I}{\psi}(u,1). \qquad (3.7)$$

Wenden wir auf (2.3) unsere Transformation an und berücksichtigen (3.6) und (3.7), so erhalten wir:

$$(u^2+v^2-k^2)\cdot\psi(u,v) = r(u) - v(e^{-v}\,\overset{I}{\psi}(u,1) - \overset{I}{\psi}(u,0)). \qquad (3.8)$$

Die Gleichung (3.8) gilt für alle v und für u aus dem Streifen $\beta_1 < \mathrm{Re}(u) < \beta$. Sei

$$\gamma = \sqrt{k^2 - u^2}, \qquad (3.9)$$

so folgt aus (3.8):

$$\psi(u,v) = \frac{r(u) - v(e^{-v}\,\overset{I}{\psi}(u,1) - \overset{I}{\psi}(u,0))}{(v+\gamma)(v-\gamma)} \qquad (3.10)$$

Da $\psi(u,v)$ bzgl. u eine zweiseitige Laplacetransformierte und bzgl. v eine endliche Laplacetransformierte ist, muß $\psi(u,v)$ für jedes feste v im Streifen $\beta_1 < \mathrm{Re}(u) < \beta$ bzgl. u holomorph sein und für jedes feste u aus dem Streifen bzgl. v eine ganze Funktion sein.

Wir legen die Verzweigungsschnitte von γ von - k und + k jeweils nach "außen", wie in Bild 4. Weiter wollen wir noch so festlegen, daß in $-k < \mathrm{Re}(u) < +k$ der Realteil von γ nicht negativ ist.

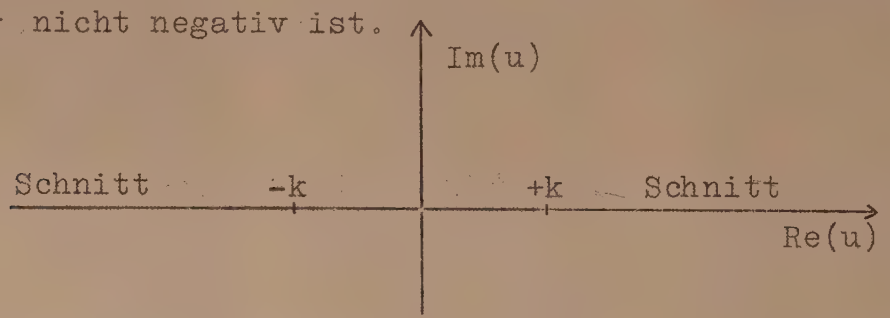

Bild 4: Aufgeschnittene u-Ebene.

Damit $\psi(u,v)$ bzgl. v eine ganze Funktion ist, muß in (3.10) notwendig der Zähler für $v = \pm\gamma$ verschwinden. Dies legt uns in (3.10) die zwei unbekannten Funktionen fest. Wir erhalten folgendes Gleichungssystem, das in $\beta_1 < \mathrm{Re}(u) < \beta$

stets lösbar ist, da die Determinante von Null verschieden ist:

$$\overset{I}{\psi}(u,o) - e^{-\gamma}\overset{I}{\psi}(u,1) = -\frac{r(u)}{\gamma} \qquad (3.11)$$

$$\overset{I}{\psi}(u,o) - e^{\gamma}\overset{I}{\psi}(u,1) = \frac{r(u)}{\gamma} \qquad (3.12)$$

Die Lösung lautet:

$$\overset{I}{\psi}(u,o) = -\frac{ch\,\gamma}{\gamma\,sh\,\gamma}\,r(u), \qquad (3.13)$$

$$\overset{I}{\psi}(u,1) = \frac{1}{\gamma\,sh\,\gamma}\,r(u). \qquad (3.14)$$

(Wir wollen an dieser Stelle kurz auf den Fall k = o hinweisen. In diesem Falle müßte man als Holomorphiestreifen $o < Re(u) < \min(\beta, \pi)$ nehmen. Die weiteren Rechnungen würden dann ganz analog zu den nun folgenden laufen.)

Wir setzen (3.13) und (3.14) in (3.1o) ein und erhalten:

$$\psi(u,v) = \frac{\gamma sh\gamma - v.ch\gamma + v.e^{-v}}{(v+\gamma)(v-\gamma)}\,\frac{r(u)}{\gamma\,sh\,\gamma}\,. \qquad (3.15)$$

Mit (3.15) haben wir schon die eindeutige Lösbarkeit unseres Neumannproblems gezeigt. Denn jede Lösung $\psi(x,y)$ muß auch als Lösung im Bildbereich auftreten. Hier haben wir aber eine eindeutig bestimmte Lösung erhalten. Auf Grund eines bekannten Satzes über die Laplacetransformation hat aber $\psi(u,v)$ höchstens ein Urbild in $\mathfrak{G}_1^{(o)}$, womit die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\psi(u,v)$ wirklich ein Urbild besitzt, das unser Neumannproblem löst.

Wir transformieren zunächst bzgl. v zurück. Dazu brauchen wir nur den ersten Faktor von (3.15) zu betrachten. Wir zeigen, daß das Urbild dieses Faktors bzgl. v gleich

$$-ch\gamma(y-1)$$

ist. Denn:

$$-\int_o^1 ch\gamma(y-1).e^{-vy}dy = -\frac{1}{2}\int_o^1 \left(e^{\gamma(y-1)} + e^{-\gamma(y-1)}\right) e^{-vy}dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-\gamma}(e^{\gamma-v}-1)}{\gamma-v} - \frac{e^{\gamma}(e^{-\gamma-v}-1)}{\gamma+v}\right\} =$$

$$= \frac{\gamma \operatorname{sh}\gamma - v.\operatorname{ch}\gamma + v.e^{-v}}{(v+\gamma)(v-\gamma)}, \qquad (3.16)$$

was zu zeigen war.

Sei $$\overset{I}{\psi}(u,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,y).e^{-ux}dx\,, \qquad (3.17)$$

so erhalten wir aus (3.15) wegen (3.16):

$$\overset{I}{\psi}(u,y) = -\frac{\operatorname{ch}\gamma(y-1)}{\gamma \operatorname{sh}\gamma} r(u)\,, \quad \beta_1 < \operatorname{Re}(u) < \beta\,, \qquad (3.18)$$

Wir setzen: $$g(u,y) = \frac{\operatorname{ch}\gamma(y-1)}{\gamma \operatorname{sh}\gamma}\,, \quad -k < \operatorname{Re}(u) < k. \qquad (3.19)$$

Wenn wir wissen, daß g(u,y) eine zweiseitige Laplacetransformierte ist, und ihr Urbild kennen, so können wir das Urbild von (3.18) nach dem Faltungssatz für die zweiseitige Laplacetransformation sofort als Faltungsintegral angeben.

Aus diesem Grunde untersuchen wir zunächst die Funktion g(u,y), berechnen ihr Urbild und zeigen einige Eigenschaften dieses Urbildes, die wir später benötigen werden.

Zunächst sieht man sofort, daß g(u,y) eine gerade Funktion von γ ist, d.h. aber, es treten keine Verzweigungen auf, und g(u,y) ist eine meromorphe Funktion von u. Es treten nur die einfachen Pole

$$u = \pm \sigma_n = \pm \sqrt{k^2 + n^2\pi^2}\,, \quad n=0,1,\ldots \qquad (3.20)$$

auf.

Für $|u| \longrightarrow \infty$ in der u-Ebene gilt folgendes asymptotische Verhalten:

$$g(u,y) = 0\left(\frac{e^{-y|u|}}{|u|}\right) \qquad (3.21)$$

für $|u| \longrightarrow \infty$ in $-k < \operatorname{Re}(u) < k$ und $0 \leq y \leq 1$; und

$$g(u,y) = 0\left(\frac{1}{|u|}\right) \qquad (3.22)$$

für $|u| \to \infty$ in beliebiger Richtung in der u-Ebene, wobei nur u einen positiven Abstand von $\pm \sigma_n$ haben muß, und $0 \leq y \leq 1$ ist.

Man sieht die Richtigkeit dieser beiden Behauptungen leicht ein, wenn man in (3.19) die Hyperbelfunktionen durch die Exponentialfunktion ausdrückt.

Auf Grund von (3.21) besitzt g(u,y) ein Urbild, und wir können es mit Hilfe der komplexen Umkehrformel angeben:

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\mathrm{ch}\,\gamma(y-1)}{\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma} e^{ux}\,du\,, \quad -k < \sigma < k. \qquad (3.24)$$

Wegen (3.22) und der Tatsache, daß g(u,y) meromorph ist mit den einfachen Polen (3.2o), läßt sich das Integral (3.24) mit Hilfe der Residuenrechnung in bekannter Weise auswerten. Man erhält:

$$G(x,y) = \frac{e^{-k|x|}}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n|x|}}{\sigma_n}\cdot\cos(n\pi y). \qquad (3.25)$$

Die Reihe konvergiert für alle $|x| \geq \varepsilon > o$ und $o \leq y \leq 1$ absolut und gleichmäßig. (G(x,y) ist genau die "Neumannsche Funktion" des Problems. An dieser Stelle sieht man schon, daß der Fall k = o nicht durch Grenzübergang $k \longrightarrow o$ erhalten werden kann.)

Da wir von G(x,y) noch bestimmte Eigenschaften beweisen wollen, die wir bei der Verifikation der Lösung benötigen werden, soll für G(x,y) zunächst eine Integraldarstellung hergeleitet werden.

Nach ERDELYI [5] , S.2oo,(9), gilt für $\mathrm{Re}(u) > |\mathrm{Re}(b)| \geq o$ die folgende Beziehung:

$$\frac{e^{-\sqrt{u^2-b^2}\,|x|}}{\sqrt{u^2-b^2}} = \frac{1}{u}e^{-u|x|} + \frac{1}{u}\int_{|x|}^{\infty} \frac{b\eta I_1(b\sqrt{\eta^2-x^2})}{\sqrt{\eta^2-x^2}} e^{-u\eta}\,d\eta, \qquad (3.26)$$

wobei $I_1(z)$ die modifizierte Besselfunktion 1.Art und 1.Ordnung ist, die mit der gewöhnlichen Besselfunktion $J_1(z)$ folgendermaßen zusammenhängt:

$$I_1(iz) = iJ_1(z) \qquad (3.27)$$

Setzen wir in (3.26) b = ik, $u = n\pi$, (n=1,2,..), beachten (3.27) und nutzen die Beziehung:

$$\frac{k\eta J_1(k\sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} = -\frac{\partial}{\partial\eta} J_o(k\sqrt{\eta^2 - x^2}) \qquad (3.28)$$

aus, so erhalten wir:

$$\frac{e^{-\sigma_n|x|}}{\sigma_n} = \frac{1}{n\pi}\left\{ e^{-n\pi|x|} + \int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\eta} J_o(k\sqrt{\eta^2 - x^2}) e^{-n\pi\eta} d\eta \right\}. \qquad (3.29)$$

Setzen wir (3.29) in (3.25) ein und beachten, daß wir wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz und der Konvergenz des Integrales über die Reihe aus den Beträgen nach BROMWICH [1] , S. 5oo, Summation und Integration vertauschen dürfen, so ergibt sich:

$$G(x,y) = \frac{e^{-k|x|}}{2k} + G_o(x,y) + \int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\eta} J_o(k\sqrt{\eta^2 - x^2}) G_o(\eta,y) d\eta , \qquad (3.3o)$$

mit

$$G_o(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\pi|x|}}{n} \cos(n\pi y) . \qquad (3.31)$$

(3.31) läßt sich aufsummieren, wenn man

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} , \quad |z| < 1, \qquad (3.32)$$

beachtet. Denn:

$$G_o(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{-n\pi(|x| + iy)} + e^{-n\pi(|x| - iy)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \log\left(1 - e^{-\pi(|x| + iy)}\right)\left(1 - e^{-\pi(|x| - iy)}\right),$$

woraus nach kleinen Umformungen folgt:

$$G_o(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log\left(2\,\frac{ch(\pi x) - \cos(\pi y)}{ch(\pi x) + sh(\pi|x|)}\right) \qquad (3.33)$$

Aus (3.31) folgt noch, daß $G_o(x,y)$ für $o \leq y \leq 1$ und für $|x| \longrightarrow \infty$ sich wie $O(\exp(-\pi|x|))$ verhält, ebenso die Ableitungen nach x und y, sodaß in (3.3o) für $|x| > o$ und $o \leq y \leq 1$ sowohl nach x wie nach y unter dem Integral differenziert werden darf.

Von $G(x,y)$ zeigen wir nun folgende Eigenschaften:

(I) $$\left|G(x,y)\right| \leq C \cdot e^{-k|x|} \qquad (3.34)$$

für $|x| \geq \delta_0 > o$ und $o \leq y \leq 1$, wobei C eine positive Konstante ist.

(II) $$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log(x^2+y^2) + G_1(x,y) \qquad (3,35)$$

wobei

(a) $\frac{\partial}{\partial x} G_1(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} G_1(x,y)$ für alle x und $o \leq y \leq 1$ beschränkt und stückweise stetig sind.

(b) $\frac{\partial^2}{\partial y^2} G_1(x,y)$ für $|x|>\varepsilon$, $o \leq y \leq 1$ beschränkt und stetig ist und für $(x,y) \longrightarrow (o,o)$ logarithmisch singulär ist.

Beweis:

Zu (I):

(I) ergibt sich unmittelbar aus der Reihe (3.25), wenn man die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe für $|x| \geq \delta_0 > o$ beachtet und (3.2o) berücksichtigt.

Zu (II):

Um (II),(a) zu zeigen, bringen wir (3.3o) durch partielle Integration auf die Gestalt:

$$G(x,y) = \frac{e^{-k|x|}}{2k} - \int_{|x|}^{\infty} J_o(k\sqrt{\eta^2 - x^2})\frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta,y)\,d\eta \,. \qquad (3.36)$$

Wir betrachten (3.35) als Definitionsgleichung für $G_1(x,y)$ und leiten $G_1(x,y)$ nach x ab, indem wir (3.36) benutzen:

$$\frac{\partial}{\partial x} G_1(x,y) = -\operatorname{sign}(x)\frac{e^{-k|x|}}{2} +$$

$$+ \operatorname{sign}(x)\frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta,y)\Big|_{\eta = |x|} - \frac{1}{\pi}\,\frac{x}{x^2+y^2} -$$

$$- \int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} J_o(k\sqrt{\eta^2 - x^2})\frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta,y)\,d\eta \,, \qquad (3.37)$$

wegen $J_o(o) = 1$.

Wir bilden zunächst:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}(\pi\eta)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi y)} - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\eta) \qquad (3.38)$$

und dann

$$\operatorname{sign}(x) \frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y) \Big|_{\eta = |x|} - \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}(\pi x)}{\operatorname{ch}(\pi x) - \cos(\pi y)} - \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \,. \qquad (3.39)$$

Durch Entwicklung um $x = o$ und $y = o$ bestätigt man leicht, daß (3.39) für alle x und $o \leq y \leq 1$ stetig und beschränkt ist.

Da $\operatorname{sign}(x) . e^{-k|x|}$ stückweise stetig und beschränkt ist, müssen wir in (3.37) nur noch das Integral untersuchen. Für $|x| \geq \varepsilon > o$ ist es stetig und beschränkt; es fehlt nur noch das Verhalten für $x \longrightarrow o$, $y \longrightarrow o$. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} J_o(k \sqrt{\eta^2 - x^2}) = kx \frac{J_1(k \sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \,, \qquad (3.40)$$

wobei (3.40) bekanntlich für alle x und η stetig und beschränkt ist, erhalten wir:

$$\int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} J_o(k \sqrt{\eta^2 - x^2}) \frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y) \, d\eta =$$

$$= kx \int_{|x|}^{\infty} \frac{J_1(k \sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y) \, d\eta \,.$$

Wir spalten rechts das Integral auf, indem wir annehmen, daß $o < |x| < 1$ ist:

$$kx \int_{|x|}^{\infty} \frac{J_1(k \sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y) \, d\eta =$$

$$= kx \int_{|x|}^{1} \ldots\ldots + kx \int_{1}^{\infty} \ldots\ldots$$

Das zweite Integral strebt für $o \leq y \leq 1$ und $x \longrightarrow o$ selbst gegen Null. Darum brauchen wir nur noch das Integral

$$kx \int_{|x|}^{1} \frac{J_1(k \sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y) \, d\eta \qquad (3.41)$$

auf seine Beschränktheit für $x \to o$, $y \to o$ zu untersuchen.

Aus (3.38) ergibt sich, daß $\frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y)$ für $\eta > o$ immer das gleiche Vorzeichen hat. Wegen der Stetigkeit des Integranden für $|x| > o$ können wir für jedes feste x mit $o < |x| < 1$ den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung auf (3.41) anwenden. Sei $\vartheta = \vartheta(|x|)$ zwischen $|x|$ und 1, so gilt:

$$kx \int_{|x|}^{1} \frac{J_1(k\sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} G_o(\eta, y)\, d\eta =$$

$$= kx \frac{J_1(k\sqrt{\vartheta^2 - x^2})}{\sqrt{\vartheta^2 - x^2}} \left\{ G_o(1, y) - G_o(|x|, y) \right\}. \qquad (3.42)$$

Da

$$\frac{J_1(k\sqrt{\vartheta^2 - x^2})}{\sqrt{\vartheta^2 - x^2}}$$

für alle reellen ϑ und x beschränkt bleibt, und $G_o(x,y)$ höchstens logarithmisch singulär wird, strebt (3.42) für $x \to o$ und $y \to o$ selbst gegen Null.

Sammeln wir alle Ergebnisse, so haben wir für $\frac{\partial}{\partial x} G_1(x,y)$ die Behauptung (II), (a) gezeigt. Für $\frac{\partial}{\partial y} G_1(x,y)$ zeigt man sie mit Hilfe von (3.3o) in ähnlicher Weise.

Wir haben noch (II), (b) zu zeigen. Wir bilden für $|x| > o$ mit Hilfe von (3.3o) :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} G_1(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_o(x,y) - \frac{1}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} +$$

$$+ \int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} J_o(k\sqrt{\eta^2 - x^2}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_o(\eta, y)\, d\eta. \qquad (3.43)$$

Aus (3.33) ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} G_o(x,y) = \frac{\pi}{2} \frac{\cos(\pi y).\mathrm{ch}(\pi x) - 1}{(\mathrm{ch}(\pi x) - \cos(\pi y))^2} \qquad (3.44)$$

Durch Entwicklung um $x = o$, $y = o$ zeigt man mit Hilfe von (3.44) wieder leicht, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} G_o(x,y) - \frac{1}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad (3.45)$$

für alle x und $o \leq y \leq 1$ beschränkt und stetig ist. Damit brauchen wir nur noch das Integral in (3.43) zu untersuchen für $x \longrightarrow o$ und $y \longrightarrow o$.

Aus dem, was wir über (3.45) gesagt haben, können wir leicht folgern, daß es eine Konstante $C > o$ so gibt, daß

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_o(\eta, y) \right| \leq C \frac{|\eta^2 - y^2|}{(\eta^2 + y^2)^2} \leq C \frac{1}{\eta^2 + y^2} \qquad (3.46)$$

für $|\eta| \leq 1$ und $o \leq y \leq 1$ gilt.

Nehmen wir an, daß $o < |x| \leq 1$ ist und spalten das Integral in (3.43) auf in eines von $|x|$ bis 1 und eines von 1 bis ∞, so ist das zweite Integral für alle x und $o \leq y \leq 1$ beschränkt. Das andere schätzen wir mit Hilfe von (3.46) ab:

$$\left| \int_{|x|}^{1} \frac{\partial}{\partial \eta} J_o(k\sqrt{\eta^2 - x^2}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_o(\eta, y)\, d\eta \right| =$$

$$= \left| k \int_{|x|}^{1} \eta \cdot \frac{J_1(k\sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} G_o(\eta, y)\, d\eta \right| \leq$$

$$\leq kmC \int_{|x|}^{1} \frac{\eta}{\eta^2 + y^2}\, d\eta = \frac{1}{2} kmC \log \frac{1 + y^2}{x^2 + y^2}, \qquad (3.47)$$

wobei m eine Schranke für

$$\frac{J_1(k\sqrt{\eta^2 - x^2})}{\sqrt{\eta^2 - x^2}}$$

ist. Aus (3.43) bis (3.47) folgt dann sofort die Behauptung von (II), (b).

Nachdem wir $G(x,y)$ genügend untersucht haben, können wir die Lösung unseres Neumannproblems in zwei verschiedenen Integraldarstellungen angeben, und zwar einmal über das komplexe Umkehrintegral, dann aber auch über den Faltungssatz für die zweiseitige Laplacetransformation. Dies soll im nächsten Paragraphen geschehen.

§ 4 Verifikation der Lösung des Neumannproblems.

Wir zeigen, daß die Funktion

$$\Psi(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,y).R(\xi)\, d\xi\,, \qquad (4.1)$$

die wir auch in der Form

$$\Psi(x,y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(u,y).r(u).e^{ux}du \qquad (4.2)$$

mit $\beta_1 < \sigma < \beta$ darstellen können, die Lösung unseres Neumannproblems ist.

Dazu müssen wir zeigen, daß $\Psi(x,y) \in \mathfrak{K}_1^{(0)}$ ist, und daß die Bedingungen (2.3) bis (2.5) erfüllt sind. (Den Nachweis der Gültigkeit von (2.3) und (2.4) werden wir hier nicht explizit bringen, da er sehr einfach ist.)

Die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften folgen für $o < y \leq 1$ wegen (3.21) sofort aus (4.2), wenn man beachtet, daß man wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der auftretenden Integrale die Differentiation mit der Integration vertauschen darf.

Für $y = o$ müssen wir noch zeigen, daß $\Psi(x,o)$, $\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,o)$ und $\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,o)$ stetig sind.

Für $\Psi(x,o)$ ergibt sich die Stetigkeit sofort aus (4.1) wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals für $o \leq y \leq 1$ und alle x.

Um die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,o)$ zu zeigen, schreiben wir für $y = o$ (4.1) in der Form:

$$\Psi(x,o) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,o).R(x-\xi)\, d\xi\,. \qquad (4.3)$$

Da $R(x) \in \mathfrak{R}$ für $x \neq o$ stetig differenzierbar ist, und die Ableitung eine integrable Singularität mit dem Verhalten (2.2) hat, dürfen wir nach BROMWICH [1] , S. 486 ff. unter dem Integral differenzieren, und das differenzierte Integral ist für alle x stetig.

Die Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,o)$ haben wir sofort, wenn wir gezeigt haben, daß

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,o) = R(x) \qquad (4.4)$$

ist.

Wir zeigen (4.4) mit Hilfe von (4.1).

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann bilden wir für $y > 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial}{\partial y} \psi(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} G(x-\xi,y) \cdot R(\xi)\, d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} G(x-\xi,y) \cdot R(\xi)\, d\xi \right\} + \lim_{y \to 0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} G(x-\xi,y) \cdot R(\xi)\, d\xi . \quad (4.5)$$

Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial y} G(x-\xi,y)$ für $x \neq \xi$ und der gleichmäßigen Konvergenz der Integrale

$$\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} G(x-\xi,y) \cdot R(\xi)\, d\xi , \quad \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} G(x-\xi,y) \cdot R(\xi)\, d\xi \quad (4.6)$$

dürfen wir in den beiden ersten Integralen von (4.5) die Differentiation unter das Integral ziehen. Denken wir uns dann für $\frac{\partial}{\partial y} G(x-\xi,y)$ die gliedweise differenzierte Reihe (3.25) eingesetzt, so dürfen wir, wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für $|x-\xi| \geq \varepsilon$ und der Konvergenz der Integrale über die Beträge, Summation und Integration vertauschen. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der entstandenen Reihe dürfen wir die Limesbildung $y \to 0$ unter das Summenzeichen ziehen. Da dort nur Glieder mit $\sin(n\pi y)$ für $n = 1,2,\ldots$ auftreten, streben die ersten beiden Integrale in (4.5) gegen Null, falls y gegen Null strebt.

Es bleibt noch

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial}{\partial y} \psi(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} G(x-\xi,y) \cdot R(\xi)\, d\xi . \quad (4.7)$$

Für $y > 0$ dürfen wir unter dem Integral differenzieren. Setzen wir für $G(x-\xi,y)$ (3.35) ein und beachten (II), (a), so ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} G(x-\xi,y) \cdot R(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} R(\xi)\, d\xi + o(1) \quad (4.8)$$

wobei o(1) sich auf beliebig kleines $\varepsilon > o$ beziehen soll für alle y mit $o \leq y \leq 1$.

Für $y > o$ ist

$$\frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} > o$$

und stetig in ξ; $R(\xi)$ ist nach Voraussetzung stetig. Damit können wir den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung in (4.8) anwenden. Für $-\varepsilon < \vartheta < \varepsilon$ erhalten wir

$$\frac{1}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} R(\xi)\, d\xi = R(x+\vartheta) \frac{1}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi =$$

$$= R(x+\vartheta) \frac{2}{\pi} \left\{ \text{H.W.arctg}\left(\frac{\varepsilon}{y}\right) \right\} \quad (4.9)$$

Lassen wir in (4.9) y gegen Null streben, so ergibt sich rechts $R(x+\vartheta)$. Da dies für beliebiges $\varepsilon > o$ gelten muß, ergibt sich, wenn man alle Ergebnisse sammelt:

$$\lim_{y \to o} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, y) . R(\xi)\, d\xi = R(x) \quad (4.10)$$

für alle x, womit (4.4) bewiesen ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,y) e^{-ux-vy} dx dy , \quad (4.11)$$

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x,y) e^{-ux-vy} dx dy \quad (4.12)$$

für u und v aus

$$\beta_1 - \varepsilon < \text{Re}(u) < \beta + \varepsilon , \quad |v| \leq |v_o| < \infty \quad (4.13)$$

absolut und gleichmäßig konvergieren, und daß $\psi(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)$ für $|x| \to \infty$ das asymptotische Verhalten (1.37) haben.

Zunächst zu (4.11). Wir zerlegen $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)$ in Summanden und zeigen für diese einzeln die absolute und gleichmäßige Konvergenz im Bereich (4.13).

Sei $\delta_o > o$, dann bilden wir für $y > o$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,y).R(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{x-\delta_o}^{x+\delta_o} G(x-\xi,y).R(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{x-\delta_o} G(x-\xi,y).R(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{x+\delta_o}^{\infty} G(x-\xi,y).R(\xi)\, d\xi .$$

Durch Differentiation nach der oberen bzw. unteren Grenze und durch die Substitution $x-\xi = \eta$ erhalten wir:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\delta_o}^{\delta_o} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta,y).R\,(x-\eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} G(\delta_o,y).R(x-\delta_o) - \frac{\partial}{\partial x} G(-\delta_o,y).R(x+\delta_o) +$$

$$+ \int_{\delta_o}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} G(\eta,y).R(x-\eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-\delta_o} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} G(\eta,y).R(x-\eta)\, d\eta. \qquad (4.14)$$

Für die letzten vier Terme von (4.14) existiert das entsprechende Integral (4.11) absolut und gleichmäßig im Bereich (4.13). Denn wegen der Beschränktheit von $\frac{\partial}{\partial x} G(\delta_o,y)$ und $\frac{\partial}{\partial x} G(-\delta_o,y)$ für alle y aus $o \leq y \leq 1$ und wegen (2.1) gilt:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} G(\delta_o,y).R(x-\delta_o)\right| \leq \begin{cases} Me^{\beta x} & x \leq o \\ Me^{\beta_1 x} & x \geq o \end{cases} \qquad (4.15)$$

wobei M eine positive Konstante ist. Für $\frac{\partial}{\partial x} G(-\delta_o,y).R(x+\delta_o)$

gilt eine entsprechende Abschätzung.

Aber auch die beiden letzten Integrale in (4.14) genügen einer solchen Abschätzung. Denn für $|\eta| \geq \delta_0 > 0$ folgt aus (3.25)

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} G(\eta, y) \right| \leq C \cdot e^{-k|\eta|} \quad \text{für} \quad 0 \leq y \leq 1, \qquad (4.16)$$

wobei C eine von y und η unabhängige Konstante ist.

Setzt man (4.16) in diese beiden Integrale ein und berücksichtigt (2.1), so zeigt man leicht, daß diese Integrale einer Abschätzung (4.15) genügen. Hieraus und aus der Stetigkeit der vier letzten Terme von (4.14) folgt sofort, daß für sie das entsprechende Integral (4.11) im Bereich (4.13) absolut und gleichmäßig konvergiert.

Wir müssen noch das erste Integral in (4,14) untersuchen. Dazu beachten wir (3.35) und (II), (a):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \frac{\partial}{\partial \eta} G(\eta, y) \cdot R(x-\eta)\, d\eta = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} R(x-\eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \frac{\partial}{\partial \eta} G_1(\eta, y) \cdot R(x-\eta)\, d\eta . \qquad (4.17)$$

Da $R(x-\eta)$ für $x \neq \xi$ stetig differenzierbar ist, und die Ableitung der Abschätzung (2.2) genügt, und da $\frac{\partial}{\partial \eta} G_1(\eta, y)$ stückweise stetig und beschränkt ist nach (II), (a), zeigt man wieder leicht, daß das letzte Integral in (4.17) eine stetige Funktion von x,y ist und einer Abschätzung (4.15) genügt, sodaß das entsprechende Integral (4.11) über diese Funktion in (4.13) absolut und gleichmäßig konvergiert.

Seien $-\delta_0 < \vartheta_1 < 0$ und $0 < \vartheta_2 < \delta_0$, so können wir das erste Integral in (4.17) aufspalten und nach dem erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung auswerten:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} R(x-\eta)\, d\eta = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-\delta_0}^{0} \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} R(x-\eta)\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\delta_0} \frac{\eta}{\eta^2 + y^2} R(x-\eta)\, d\eta \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} R(x-\vartheta_1).\log\left(\frac{y^2}{\delta_o^2 + y^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} R(x-\vartheta_2).\log\left(\frac{\delta_o^2 + y^2}{y^2}\right). \tag{4.18}$$

Wegen (2.2) existiert auch über (4.18) das entsprechende Integral absolut und gleichmäßig im Bereich (4.13), womit insgesamt der Beweis für (4.11) erbracht ist.

Um das Gleiche für (4.12) zu zeigen, bilden wir für $\delta_o > o$:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\delta_o}^{\delta_o} G(\eta,y).R(x-\eta)\,d\eta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-\delta_o} \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(\eta,y).R(x-\eta)\,d\eta$$

$$+ \int_{\delta_o}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(\eta,y).R(x-\eta)\,d\eta \quad . \tag{4.19}$$

Aus (3.25) ergibt sich für $|\eta| \geq \delta_o > o$ sofort die Abschätzung

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2} G(\eta,y)\right| \leq C.e^{-k|\eta|} \qquad \text{für } o \leq y \leq 1, \tag{4.2o}$$

wobei C eine von y und η unabhängige Konstante ist.

Aus (4.2o) und (2.1) zeigt man leicht, daß die letzten beiden Integrale in (4.19) einer Abschätzung (4.15) genügen. Wegen ihrer Stetigkeit folgt für diese Integrale dann die Behauptung.

Es bleibt noch das erste Integral von (4.19) zu untersuchen. Wir setzen (3.35) ein:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\delta_o}^{\delta_o} G(\eta,y).R(x-\eta)\,d\eta = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\delta_o}^{\delta_o} \log(\eta^2+y^2).R(x-\eta)\,d\eta +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\delta_o}^{\delta_o} G_1(\eta,y).R(x-\eta)\,d\eta \quad . \tag{4.21}$$

Wegen (II), (b) und (2.1) überlegt man sich leicht, wenn man die Differentiation unter das Integral zieht, daß das letzte Integral in (4.21) wieder einer Abschätzung (4.15) genügt, und daß es für alle x und $o \leq y \leq 1$ stetig ist, woraus

für dieses Integral wieder die Behauptung folgt.

Sei $-\delta_0 < \vartheta < \delta_0$, so berechnen wir das erste Integral in (4.21) wieder über den erweiterten Mittelwertsatz; für $y > 0$ gilt dann:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \log(\eta^2 + y^2) \cdot R(x-\eta)\, d\eta = 2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \frac{y}{\eta^2 + y^2} R(x-\eta)\, d\eta =$$

$$= 4R(x-\vartheta) \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg}\left(\frac{\delta_0}{y}\right)$$

$$= -\, 4R(x-\vartheta)\, \frac{\delta_0^2}{y^2 + \delta_0^2} \,. \qquad (4.22)$$

Wegen (2.1) folgt dann auch, daß für (4.22) das entsprechende Integral (4.12) absolut und gleichmäßig für (4.13) konvergiert. Damit ist auch für (4.12) die Behauptung bewiesen.

Wir hätten schließlich noch zu zeigen, daß $\psi(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y)$ das asymptotische Verhalten (1.37) haben. Man benutzt dazu (3.35) und die Abschätzungen (2.1) und (2.2) für $R(x)$ bzw. $R'(x)$. Wir wollen dies hier nichtmehr explizit durchführen, da ähnliche Abschätzungen wie im Vorangehenden auftreten.

Damit haben wir insgesamt gezeigt, daß $\psi(x,y) \in \mathfrak{L}_1^{(0)}$ ist und also die eindeutige Lösung des Neumannproblems darstellt.---

Mit dieser allgemeinen Lösung des Neumannproblems können wir nun sofort die Lösung des Seite 13 formulierten "Problems A" angeben.

§5 Lösung von "Problem A".

Wir betrachten zunächst das Gebiet G_1 und setzen:

$$R_1(x,t) \underset{\text{Def.}}{=} \begin{cases} F(x,t) & x \leq o \\ (U_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})\, H(x,t) & x \geq o \end{cases} \tag{5.1}$$

Dann gehört $R_1(x,t)$ für festes $t \geq o$ auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen der Klasse $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zur Klasse $\mathcal{R}$. Setzen wir $R_1(x,t)$ in die Lösung (4.1) unseres Neumannproblems ein, so liefert die erhaltene Formel die Funktion:

$$\phi_1(x,y,t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,y) \cdot R_1(\xi,t)\, d\xi \,. \tag{5.2}$$

$\phi_1(x,y,t)$ löst das Problem A im Gebiet G_1. Daß ϕ_1 dabei zur Klasse $\mathcal{K}_1$ gehört, sieht man sofort. Denn nach dem, was wir bei der Lösung des Neumannproblems bewiesen haben, gehört $\phi_1(x,yt)$ für jedes feste $t \geq o$ zur Klasse $\mathcal{K}_1^{(0)}$. Wegen der gleichmäßigen Abhängigkeit der Funktionen $F(x,t)$ und $H(x,t)$ bzgl. t und der Abschätzungen, welchen diese Funktionen samt ihren partiellen Ableitungen genügen, läßt sich sofort folgern, daß $\phi_1(x,y,t)$ aus $\mathcal{K}_1$ ist; insbesondere können wir unter dem Integral nach x und t differenzieren.

Wegen der Symmetrie der Funktion $G(x,y) = G(x,-y)$ sieht man leicht, daß, falls für $t \geq o$

$$R_2(x,t) \underset{\text{Def.}}{=} \begin{cases} F(x,t) & x \leq o \\ (U_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t})\, H(x,t) & x \geq o \end{cases} \tag{5.3}$$

gesetzt wird, die Lösung von "Problem A" in G_2 lautet:

$$\phi_2(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,y) \cdot R_2(\xi,t)\, d\xi \,. \tag{5.4}$$

Explizit lauten dann ϕ_1 und ϕ_2:

$$\phi_j(x,y,t) = (-1)^j \int_{-\infty}^{0} G(x-\xi,y).F(\xi,t)\, d\xi \; +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} G(x-\xi,y)\left(U_j \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t}\right) H(\xi,t)\, d\xi \,. \qquad (5.5)$$

Wenn wir also H(x,t) kennen, ist unser "Problem P" vollständig gelöst durch (5.5).

Um H(x,t) zu bestimmen, fomulieren wir im nächsten Paragraphen mit Hilfe der Bedingung (1.28), d.h. der Forderung der Druckgleichheit längs der Wirbelschicht, das "Problem B".

§ 6 Formulierung von"Problem B".

Wir bilden die Druckdifferenz $D(x,t)$ für $t \geq o$ und alle x längs $y = o$. Diese Differenz erhält man durch den Ausdruck auf der linken Seite von (1.28):

$$D(x,t) = \varrho_2(U_2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\phi_2(x,o,t) - \varrho_1(U_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\phi_1(x,o,t) \quad (6.1)$$

für $-\infty < x < \infty$, $t \geq o$.

In (6.1) setzen wir (5.5) ein und erhalten:

$$D(x,t) = \varrho_2(U_2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\int_o^\infty G(x-\xi,o)(U_2\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t})\,H(\xi,t)\,d\xi +$$

$$+\varrho_1(U_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\int_o^\infty G(x-\xi,o)(U_1\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t})H(\xi,t)\,d\xi +$$

$$+\left\{(\varrho_1U_1+\varrho_2U_2)\frac{\partial}{\partial x}+(\varrho_1+\varrho_2)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\int_{-\infty}^{o} G(x-\xi,o)F(\xi,t)d\xi \quad (6.2)$$

Wir formen noch um. Es gilt:

$$(U_j\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\int_o^\infty G(x-\xi,o)(U_j\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t})\,H(\xi,t)\,d\xi =$$

$$= (U_j\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\int_{-\infty}^{x} G(\xi,o)(U_j\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\,H(x-\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} G(\xi,o)(U_j\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})^2H(x-\xi,t)\,d\xi =$$

$$= \int_o^\infty G(x-\xi,o)(U_j\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t})^2H(\xi,t)\,d\xi\,. \quad (6.3)$$

Man sieht dies ein, wenn man beachtet, daß wegen (1.4o) $H(o,t) = \frac{\partial}{\partial x}H(o,t) = o$ ist, und daß bei den Ableitungen von $H(\xi,t)$ höchstens $H_{\xi\xi}(\xi,t)$ singulär wird für $\xi = o$. Doch diese Singularität ist wegen (1.39) noch integrabel, sodaß wir nach BROMWICH [1] , S. 486, unter dem Integral differenzieren dürfen, wenn wir noch beachten, daß

$$G(x) = O(e^{-k|x|})$$

ist für $|x| \to \infty$.

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein:

$$\lambda_1 = \varrho_1 U_1^2 + \varrho_2 U_2^2 , \tag{6.4}$$

$$\lambda_2 = \varrho_1 U_1 + \varrho_2 U_2 , \tag{6.5}$$

$$\lambda_3 = \varrho_1 + \varrho_2 , \tag{6.6}$$

$$K(x) = G(x,o) , \tag{6.7}$$

$$D_o = \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2}{2\partial x \partial t} + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \tag{6.8}$$

Mit (6.3) bis (6.8) erhalten wir aus (6.2):

$$D(x,t) = \int_0^\infty K(x-\xi) . D_o\left[H(\xi,t)\right] \, d\xi + \left(\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{-\infty}^{o} K(x-\xi) F(\xi,t) d\xi \tag{6.9}$$

für $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant o$.

Beachten wir nun, daß die Gleichung (1.28) fordert, daß die Druckdifferenz $D(x,t)$ für $x > o$ und $t \geqslant o$ verschwinden muß, so können wir das "Problem B" formulieren:

"Problem B".

Gesucht ist $H(x,t) \in \mathfrak{H}$ derart, daß für $x > o$, $t \geqslant o$

$$D(x,t) = o \tag{6.10}$$

gilt.

Die Gleichung (6.10) stellt, wie man aus (6.9) sieht, eine inhomogene, partielle Integro-Differentialgleichung erster Art für die gesuchte Funktion $H(x,t)$ im ersten Quadranten der (x,t)-Ebene dar. Wegen

$$\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2 = \varrho_1 \varrho_2 (U_1 - U_2)^2$$

ist der Differentialoperator D_o für $U_1 \neq U_2$ elliptisch, für $U_1 = U_2 = U$ parabolisch.

Wir werden auch das "Problem B" mit Hilfe einer zweidimensionalen Laplacetransformation lösen und dabei ebenfalls die Eindeutigkeit der Lösung mitbestimmen. Die Bildgleichung werden wir mit Hilfe der WIENER-HOPF-TECHNIK (s. NOBLE [13]) lösen.

§ 7 Das "Problem B" im Bildraum.

Um das Problem B zu behandeln, gehen wir von der Gleichung (6.9) aus.

Wir führen folgende Transformierten ein:

$$h^+(u,v) = \int_0^\infty \int_0^\infty H(x,t)e^{-ux - vt}dxdt, \quad Re(u) > \beta_1, \quad Re(v) > \delta, \tag{7.1}$$

$$f^-(u,v) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 F(x,t)e^{-ux - vt}dxdt, \quad Re(u) < \beta, \quad Re(v) > \delta, \tag{7.2}$$

$$h_o^+(u) = \int_0^\infty H(x,o)e^{-ux}dx, \quad Re(u) > \beta_1, \tag{7.3}$$

$$\dot{h}_o^+(u) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} H(x,o)e^{-ux}dx, \quad Re(u) > \beta_1, \tag{7.4}$$

$$k(u) = \int_{-\infty}^\infty K(x)e^{-ux}dx, \quad -k < Re(u) < k, \tag{7.5}$$

(Die Indizes "+" bzw. "-" beziehen sich immer nur auf die Transformation bzgl. x. "+" bedeutet Transformation von o bis ∞ "-" von $-\infty$ bis o.)

Alle diese Transformationen existieren absolut in den angegebenen Bereichen und stellen dort bzgl. u oder v holomorphe Funktionen dar. Die Holomorphiebereiche ergeben sich sofort, wenn man das asymptotische Verhalten der Urbildfunktionen berücksichtigt. Auch hier dürfen wir wieder, wie bei der Lösung des Neumannproblems, die einzelnen Transformationen als iterierte Transformationen bzgl. x und t ansehen.

Man überlegt sich leicht, daß auf Grund der Eigenschaften von $\phi_j(x,y,t)$ und der partiellen Ableitungen nach x und t für y = o folgende Abschätzung gilt:

$$\left|D(x,t)\right| \leq M_o e^{\beta x + \delta t}, \quad x \leq o, \quad t \geq o, \tag{7.6}$$

wobei M_o eine Konstante ist.

Für $x > o$ verschwindet $D(x,t)$ identisch. Wegen (7.6) existiert dann folgendes Integral im angegeben Bereich absolut:

$$d^-(u,v) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{o} D(x,t)e^{-ux\,-vt}dxdt, \quad Re(u) < \beta, \quad Re(v) > \delta. \tag{7.7}$$

Wir rechnen (7.7) über (6.9) explizit aus.

Für die Integration bzgl. x erhalten wir nach dem Faltunssatz für die zweiseitige Laplacetransformation, wenn wir noch (7.5) benutzen:

$$\overset{I}{D}(u,t) = k(u)\,\mathcal{L}_x\left\{D_o\left[H(x,t)\right]\right\} + (\lambda_2 u + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial t})k(u).\overset{I}{F}(u,t), \tag{7.8}$$

wobei

$$\overset{I}{D}(u,t) = \int_{-\infty}^{o} D(x,t)e^{-ux}dx, \tag{7.9}$$

$$\mathcal{L}_x\left\{D_o\left[H(x,t)\right]\right\} = \int_0^\infty D_o\left[H(x,t)\right]e^{-ux}dx, \tag{7.10}$$

$$\overset{I}{F}(u,t) = \int_{-\infty}^{o} F(x,t)e^{-ux}dx \tag{7.11}$$

sind.

Wir müssen (7.8) noch bzgl. t transformieren. Dazu berechnen wir zunächst:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty D_o\left[H(x,t)\right]e^{-ux\,-vt}dxdt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial^2}{2\partial x \partial t} + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] H(x,t)e^{-ux\,-vt}dxdt. \tag{7.12}$$

Wir dürfen in (7.12) partiell integrieren, da $H(x,t) \in \mathfrak{h}$ sein soll. Wegen $H(o,t) = H_x(o,t) = o$ und (7.1), (7.3) und (7.4) erhalten wir:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty D_o\left[H(x,t)\right]e^{-ux\,-vt}dxdt = (\lambda_1 u^2 + 2\lambda_2 uv + \lambda_3 v^2)h^+(u,v) -$$

$$- (2\lambda_2 u + \lambda_3 v)h_o^+(u) - \lambda_3 \mathring{h}_o^+(u). \tag{7.13}$$

Weiter erhalten wir, da nach Voraussetzung $F(x,o) = o$:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{o} \frac{\partial}{\partial t} F(x,t) e^{-ux - vt} dx dt = v \cdot f^-(u,v). \qquad (7.14)$$

Aus (7.13), (7.14) und (7.7) folgt dann, wenn wir auf (7.8) die Transformation bzgl. t anwenden:

$$d^-(u,v) = \left[\lambda_1 u^2 + 2\lambda_2 uv + \lambda_3 v^2\right] k(u) \cdot h^+(u,v) -$$
$$- \left[(2\lambda_2 u + \lambda_3 v) h_o^+(u) + \lambda_3 \dot{h}_o^+(u)\right] k(u) +$$
$$+ (\lambda_2 u + \lambda_3 v) k(u) \cdot f^-(u,v). \qquad (B)$$

Nimmt man den Durchschnitt aller Holomorphiegebiete der in (B) auftretenden Funktionen, so ergibt sich, daß (B) für

$$\beta_1 < \mathrm{Re}(u) < \beta, \quad \mathrm{Re}(v) > \delta \qquad (7.15)$$

gilt.

In der Gleichung (B) sind die Funktionen $d^-(u,v)$, $h^+(u,v)$, $h_o^+(u)$ und $\dot{h}_o^+(u)$ unbekannt. Wenn $h_o^+(u)$ und $\dot{h}_o^+(u)$ bekannt sind, stellt die Gleichung (B) für jedes feste v aus $\mathrm{Re}(v) > \delta$ eine gewöhnliche WIENER-HOPF-Gleichung für die gesuchten Funktionen $d^-(u,v)$ und $h^+(u,v)$ dar. Dieser Umstand liefert uns das Lösungsverfahren. Wir werden bei der Lösung der Gleichung (B) also zunächst annehmen, daß $h_o^+(u)$ und $\dot{h}_o^+(u)$ bekannt sind. Später müssen wir dann noch zwei Bedingungen finden, um die beiden unbekannten Funktionen zu bestimmen.

Zunächst wollen wir noch einige analytische- und asymptotische Eigenschaften der gesuchten Funktionen angeben. Dabei sei v fest.

$d^-(u,v)$ ist wegen (7.6) in $\mathrm{Re}(u) < \beta$ holomorph, und für $|u| \to \infty$ in $\mathrm{Re}(u) < \beta$ gilt nach DOETSCH [2], S. 171, Satz 7:

$$d^-(u,v) = o(1). \qquad (7.16)$$

Für $\mathrm{Re}(u) = \sigma \longrightarrow -\infty$, $\mathrm{Im}(u) = o$ gilt speziell:

$$d^-(u,v) = O\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \sigma = \mathrm{Re}(u) \longrightarrow -\infty . \qquad (7.17)$$

Denn wegen (7.6) können wir für $\mathrm{Im}(u) = o$ abschätzen:

$$\left| \int_{-\infty}^{o} D(x,t) e^{-\sigma x} dx \right| \leq M_o e^{\delta t} \int_{-\infty}^{o} e^{(\beta - \sigma)x} dx = \frac{M_o e^{\delta t}}{\beta - \sigma} ,$$

woraus (7.17) folgt.

$h^+(u,v)$ ist in $\mathrm{Re}(u) > \beta_1$ holomorph und für $|u| \to \infty$ in $\mathrm{Re}(u) > \beta_1$ gilt, da $H(x,t)$ in $x \geq o$ stetig nach x differenzierbar ist, und die Transformierte von $H_x(x,t)$ absolut konvergiert, nach DOETSCH [2] , S. 477, Satz 1:

$$h^+(u,v) = O\left(\frac{1}{u}\right). \qquad (7.18)$$

$h_o^+(u)$ und $\mathring{h}_o^+(u)$ haben die gleichen Eigenschaften wie $h^+(u,v)$ für festes v, da wir bei den Funktionen der Klasse $\mathfrak{H}$ gefordert haben, daß die Differenzierbarkeitseigenschaften und die Abschätzungen auch noch für $t = +o$ gelten sollen.---

Bevor wir die Gleichung (B) lösen, werden im nächsten Paragraphen noch bestimmte Eigenschaften einiger Funktionen gezeigt.

§ 8 Eigenschaften einiger Funktionen.

(a) Nach (7.5) ist die Funktion $k(u)$ in $-k < \mathrm{Re}(u) < k$ holomorph. Wir wollen sie in diesem Streifen multiplikativ zerlegen in

$$k(u) = k^+(u).k^-(u), \tag{8.1}$$

wobei $k^+(u)$ in $\mathrm{Re}(u) > -k$ holomorph und nullstellenfrei ist und für $|u| \to \infty$ in $\mathrm{Re}(u) > -k$ algebraisches Verhalten hat. Für $k^-(u)$ gelte dasselbe in $\mathrm{Re}(u) < k$.

Wegen (6.7) und (3.24) gilt:

$$k(u) = \frac{\mathrm{ch}\gamma}{\gamma\,\mathrm{sh}\gamma}. \tag{8.2}$$

Nach MEISTER [11] gilt für die Funktion

$$\ell(s) = \tfrac{1}{2}\sqrt{s^2+\varkappa^2}\;\; \frac{\cos(\frac{1}{2}\sqrt{s^2+\varkappa^2})}{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{s^2+\varkappa^2})} \tag{8.3}$$

für $|\mathrm{Re}(s)| < \mathrm{Im}(\varkappa)$, $\mathrm{Im}(\varkappa) > 0$, eine entsprechende Zerlegung in

$$\ell(s) = \ell^+(s).\ell^-(s) \tag{8.4}$$

mit

$$\ell^+(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\pi^2(2n-1)^2}} + \frac{s}{(2n-1)\pi}}{\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{4\pi^2n^2}} + \frac{s}{2\pi n}}, \tag{8.5}$$

$$\ell^-(s) = \ell^+(-s), \tag{8.6}$$

$$\ell^+(s) = O(s^{\frac{1}{2}}),\ |s| \to \infty \text{ in } \mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Im}(\varkappa). \tag{8.7}$$

Setzen wir in (8.3)

$$s = 2u,\ \varkappa = 2ki, \tag{8.8}$$

so erhalten wir:

$$\ell(2u) = \gamma \frac{ch\gamma}{sh\gamma} = \gamma^2 k(u), \tag{8.9}$$

und aus (8.4) erhalten wir die gewünschte Zerlegung mit

$$k^+(u) = \frac{\ell^+(2u)}{k+u}, \tag{8.10}$$

$$k^-(u) = \frac{\ell^-(2u)}{k-u}, \tag{8.11}$$

da $\frac{1}{u+k}$ in $Re(u) > -k$ und $\frac{1}{u-k}$ in $Re(u) < k$ holomorph sind.

Wegen (8.6) und (8.7) gilt in den entsprechenden Holomorphiehalbebenen für $|u| \to \infty$:

$$k^+(u) = O(u^{-\frac{1}{2}}), \quad k^-(u) = O(u^{-\frac{1}{2}}). \tag{8.12}$$

Wegen (8.12) und der Holomorphieeigenschaften von $k^+(u)$ bzw. $k^-(u)$ sind diese Funktionen Laplacetransformierte. Ihr Urbild läßt sich sofort über die komplexe Umkehrformel mit Hilfe von Residuenrechnung gewinnen. Wir geben wieder nur die Ergebnisse an. Die Urbilder von $k^+(u)$ und $k^-(u)$ bezeichnen wir mit $K^+(x)$ bzw. $K^-(x)$. Dann gilt:

$$K^+(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-kx}}{2k.k^+(k)} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n x}}{\sigma_n . k^+(\sigma_n)} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{8.13}$$

$$K^-(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \dfrac{e^{kx}}{2k.k^-(-k)} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sigma_n x}}{\sigma_n . k^-(-\sigma_n)} & x < 0 \end{cases} \tag{8.14}$$

wobei σ_n durch (3.20) gegeben ist.

Aus (8.13) und (8.14) folgen sofort:

$$K^+(x) = O(\, e^{-kx}\,), \quad x \longrightarrow \infty, \tag{8.15}$$

$$K^-(x) = O(\, e^{kx}\,), \quad x \longrightarrow -\infty. \tag{8.16}$$

Für $x \longrightarrow o$ gilt:

$$K^+(x) = O(\, x^{-\frac{1}{2}}\,), \quad x \longrightarrow +o, \tag{8.17}$$

$$K^-(x) = O(|x|^{-\frac{1}{2}}\,), \quad x \longrightarrow -o. \tag{8.18}$$

Wir geben nur für (8.17) die wichtigsten Beweisschritte an. Für (8.18) gilt dann Analoges.

Man gewinnt das asymptotische Verhalten von (8.13) für $x \longrightarrow +o$ aus dem asymptotischen Verhalten der Reihenglieder für große n. Wegen $\sigma_n = (k^2 + n^2\pi^2)^{1/2}$ und (8.12) verhalten sich die Reihenglieder in (8.13) für große n wie

$$f_n(x) = \frac{e^{-\pi n x}}{\sqrt{n}}$$

(bis auf einen multiplikativen festen Faktor).

Wir schätzen ab:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi n x}}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi x \xi}}{\sqrt{\xi}}\, d\xi = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,. \tag{8.19}$$

(Zur Berechnung des Integrals s. ERDELYI [5] , S. 137,(1)).

Da man zeigen kann, daß $f(x)$ und $K^+(x)$ das gleiche asymptotische Verhalten für $x \longrightarrow +o$ haben, folgt aus (8.19) sofort die Behauptung (8.17).

(b) Wir definieren folgende Funktionen:

$$Q(x,t) = \int_x^{\infty} K^+(\xi).F(x-\xi,t)\, d\xi\,, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \in \overline{W}_o, \tag{8.20}$$

$$Q^+(x,t) = \begin{cases} Q(x,t) & x \geq o, \quad t \in \overline{W}_o, \\ o & x < o, \quad t \in \overline{W}_o, \end{cases} \tag{8.21}$$

$$Q^-(x,t) = \begin{cases} o & x > o, \quad t \in \overline{W}_o, \\ Q(x,t) & x \leq o, \quad t \in \overline{W}_o. \end{cases} \tag{8.22}$$

Wir können auf (8.2o) unsere zweidimensionale Transformation bzgl. x von $-\infty$ bis $+\infty$ und bzgl. t von o bis ∞ anwenden. Bezeichnen wir die Bildfunktion mit q(u,v), so erhalten wir über den Faltungssatz:

$$q(u,v) = k^+(u).f^-(u,v). \tag{8.23}$$

Spalten wir die Transformation bzgl. x von $-\infty$ bis o bzw. von o bis ∞ auf, so ergibt sich, wenn $q^+(u,v)$ bzw. $q^-(u,v)$ die Bilder von $Q^+(x,t)$ bzw. $Q^-(x,t)$ sind:

$$q(u,v) = q^+(u,v) + q^-(u,v) \tag{8.24}$$

mit

$$q^+(u,v) = \int_o^\infty \int_o^\infty Q^+(x,t)e^{-ux\ -vt}dxdt, \tag{8.25}$$

$$q^-(u,v) = \int_{o-\infty}^{\infty\ o} \int Q^-(x,t)e^{-ux\ -vt}dxdt. \tag{8.26}$$

Dabei sind für festes v aus $Re(v) > \delta$ $q^+(u,v)$ in $Re(u) > -k$ und $q^-(u,v)$ in $Re(u) < \beta$ holomorph.

Wir bezeichnen mit $\mu(v)$ die Funktion:

$$\mu(v) = \int_o^\infty Q(o,t)e^{-vt}dt = \int_o^\infty Q^+(o,t)e^{-vt}dt = \int_o^\infty Q^-(o,t)e^{-vt}dt. \tag{8.27}$$

Wir behaupten dann:

$$\lim_{|u|\to\infty} u.q^{+}(u,v) = \mu(v), \qquad \mathrm{Re}(u) > -k, \quad \mathrm{Re}(v) > \delta, \tag{8.28}$$

$$\lim_{|u|\to\infty} u.q^{-}(u,v) = -\mu(v), \quad \mathrm{Re}(u) < \beta, \quad \mathrm{Re}(v) > \delta. \tag{8.29}$$

Wir zeigen wieder nur (8.28); (8.29) zeigt man analog. Da $F(x,t)$ stetig differenzierbar, $F(o,t) = o$ und F_x einer geeigneten Exponentialabschätzung genügt, ist $Q^{+}(x,t)$ einmal nach x differenzierbar für $x > o$ und für $x \longrightarrow +o$, und ihre Ableitung besitzt eine absolut konvergente, zweidimensionale Laplacetransformierte. Nach DOETSCH [2], S. 171, Satz 7 muß dann die Transformierte für jedes v aus $\mathrm{Re}(v) > \delta$ und für $|u| \to \infty$ in $\mathrm{Re}(u) > -k$ gegen Null streben. Wir bilden explizit:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} Q^{+}(x,t) e^{-ux - vt} dx dt = -\int_0^\infty Q^{+}(o,t) e^{-vt} dt + u.q^{+}(u,v) =$$

$$= -\mu(v) + u.q^{+}(u,v),$$

für $\mathrm{Re}(u) > -k$ und $\mathrm{Re}(v) > \delta$.

Da die linke Seite für $|u| \to \infty$ verschwindet, folgt sofort (8.28).

(c) Wir definieren weiter die Funktion:

$$M^{+}(x,t) = \begin{cases} (\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial t}) Q^{+}(x,t) & x \geqslant o, \ t \in \bar{W}_o, \\ o & x < o, \ t \in \bar{W}_o. \end{cases} \tag{8.30}$$

Wegen $F(x,o) = o$ und (8.27), erhält man leicht durch partielle Integration die zweidimensionale Transformierte von (8.30) bzgl. $o \leq x < \infty$ und $o \leq t < \infty$:

$$m^{+}(u,v) = (\lambda_2 u + \lambda_3 v).q^{+}(u,v) - \lambda_2 \mu(v). \tag{8.31}$$

Wegen $F(x,o) = F_t(x,o) = o$ für $x \leqslant o$ nach Voraussetzung, ergibt sich für $M^{+}(x,t)$:

$$M^{+}(x,o) = o, \qquad x \geqslant o. \tag{8.32}$$

Wegen (8.2o) und $F(o,t) = o$, können wir $M^+(x,t)$ auch in der Form

$$M^+(x,t) = \int_x^\infty K^+(\xi)\left(\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x-\xi,t)\, d\xi, \qquad (8.33)$$

schreiben. Da $F(x,t)$ bzgl. t für $t \in \bar{W}_o$ beliebig oft differenzierbar ist und für t auf den Randstrahlen von W_o dreimal stetig differenzierbar ist, und da $F(x,t)$ und alle auftretenden partiellen Ableitungen für $t \in W_o$ der Abschätzung (1.32) genügen, hat $M^+(x,t)$ für $x \geq o$ und $t \in \bar{W}_o$ die gleichen Eigenschaften wie $F(x,t)$ bzgl. t, außer auf den Randstrahlen, wo $M^+(x,t)$ nur zweimal stetig nach t differenzierbar ist. Bzgl. x ist $M^+(x,t)$ einmal stetig differenzierbar für $x \geq o$ und $t \in \bar{W}_o$, da $F(x,t)$ dort zweimal stetig differenzierbar, $F_x(o,t) = o$ ist und wegen der Abschätzung (1.32) für die partielle Ableitung $F_{xx}(x,t)$.

Es läßt sich hieraus leicht folgern, daß für $M^+(x,t)$ und die auftretenden partiellen Ableitungen gilt:

$$\left|M^+(x,t)\right| \leq C.e^{-kx - \alpha \mathrm{Re}(t)}, \quad x \geq o,\ t \in \bar{W}_o, \qquad (8.34)$$

wobei C eine von x und t unabhängige Konstante ist. Zum Beweis benutzt man (8.15), (8.17) und (1.32). Wir wollen dies im einzelnen nicht durchführen, da ähnliche Abschätzungen schon durchgeführt wurden.

§ 9 Die Lösung der Gleichung (B).

Mit Hilfe von (8.1) schreiben wir die Gleichung (B) von Seite 39 in der Form:

$$\frac{d^-(u,v)}{k^-(u)} = (\lambda_1 u^2 + 2\lambda_2 uv + \lambda_3 v^2).k^+(u).h^+(u,v) -$$
$$- \left[(2\lambda_2 u + \lambda_3 v).h_0^+(u) + \lambda_3 .\dot{h}_0^+(u)\right] k^+(u) +$$
$$+ (\lambda_2 u + \lambda_3 v).k^+(u).f^-(u,v). \qquad (9.1)$$

Wegen (8.23) und (8.24) können wir schreiben:

$$\frac{d^-(u,v)}{k^-(u)} - (\lambda_2 u + \lambda_3 v).q^-(u,v) =$$
$$= (\lambda_1 u^2 + 2\lambda_2 uv + \lambda_3 v^2).k^+(u).h^+(u,v) -$$
$$- \left[(2\lambda_2 u + \lambda_3 v).h_0^+(u) + \lambda_3 \dot{h}_0^+(u)\right].k^+(u) +$$
$$+ (\lambda_2 u + \lambda_3 v).q^+(u,v). \qquad (9.2)$$

In (9.2) haben wir auf der linken Seite nur Funktionen stehen, die in $\mathrm{Re}(u) < \beta$ holomorph sind und rechts solche, die in $\mathrm{Re}(u) > \beta_1$ holomorph sind. Wegen $\beta_1 < \beta$ gibt es einen gemeinsamen Holomorphiestreifen. Damit definiert (9.2) bzgl. u eine ganze Funktion für jedes feste v aus $\mathrm{Re}(v) > \delta$. Die einzelnen Funktionen haben in ihren Holomorphiegebieten alle algebraisches Verhalten für $|u| \to \infty$, wie wir jeweils gezeigt haben. Damit kann die durch (9.2) definierte ganze Funktion nach dem Liouvilleschen Satz höchstens ein Polynom in u sein mit von v abhängigen Koeffizienten. Wir zeigen nun, daß dieses Polynom eindeutig bestimmt ist und gleich

$$\lambda_2 \mu(v)$$

ist.

Wir zeigen zunächst, daß das Polynom vom Grade Null sein muß.

Das Polynom sei vom Grade $n > o$ und laute $p_n(u,v)$; dann erhalten wir aus (9.2):

$$d^-(u,v) = \left[p_n(u,v) + (\lambda_2 u + \lambda_3 v).q^-(u,v) \right] k^-(u), \quad (9.3)$$

$$h^+(u,v) = \frac{1}{(\lambda_1 u^2 + 2 \lambda_2 uv + \lambda_3 v^2) k^+(u)} \Big\{ p_n(u,v) -$$

$$- (\lambda_2 u + \lambda_3 v).q^+(u,v) +$$

$$+ \left[(2 \lambda_2 u + \lambda_3 v).h_o^+(u) + \lambda_3 \dot{h}_o^+(u) \right] k^+(u) \Big\}. \quad (9.4)$$

Wegen (8.29) und (8.12) ist dann

$$d^-(u,v) = O(u^{n - \frac{1}{2}}), \quad |u| \to \infty. \quad (9.5)$$

Da $d^-(u,v)$ bzgl. u absolut konvergente Laplacetransformierte ist in $Re(u) < \beta$, muß $d^-(u,v)$ dort für $|u| \to \infty$ gegen Null gehen, d.h. daß notwendig $n = o$ sein muß.

Es bleibt noch zu zeigen, daß

$$p_o(u,v) = \lambda_2 \mu(v) \quad (9.6)$$

ist.

Für n=o ist wegen (9.5) für $|u| \to \infty$ in $Re(u) < \beta$:

$$d^-(u,v) = O(u^{-\frac{1}{2}}). \quad (9.7)$$

Nach (7.17) muß aber für $Im(u) = o$, $Re(u) = \sigma \longrightarrow -\infty$

$$d^-(u,v) = O(\frac{1}{\sigma})$$

sein. Dies ist genau dann zu erreichen - wegen (8.29) -, wenn (9.6) gilt, womit unsere Behauptung bewiesen ist.- - -

An dieser Stelle wurde also die Bedingung benutzt, daß an der Hinterkante der Platte keine Singularität auftreten darf. Denn die Gültigkeit von (9.7) würde im allgemeinen eine Wurzelsingularität nach sich ziehen. Wir sehen also, daß wir im Rahmen unserer Rechnung die Singularität nur vermeiden können, wenn die Inhomogenität F(x,t) nicht identisch Null ist, d.h. also $q^-(u,v)$ nicht identisch verschwindet. Im andern Falle erhalten wir entweder nur die triviale Lösung oder Lösungen mit einer Wurzelsingularität.

Wir setzen nun (9.6) in (9.4) ein und erhalten, wenn wir (8.31) berücksichtigen:

$$h^+(u,v) = \frac{\left[(2\lambda_2 u + \lambda_3 v)h_0^+(u) + \lambda_3 \dot{h}_0^+(u)\right] k^+(u) - m^+(u,v)}{k^+(u)\cdot(\lambda_1 u^2 + 2\lambda_2 uv + \lambda_3 v^2)} . \quad (9.8)$$

Wir untersuchen das im Nenner von (9.8) stehende Polynom und schreiben:

$$\lambda_1 u^2 + 2\lambda_2 uv + \lambda_3 v^2 = \lambda_1 (u - av)(u - \bar{a}v) \quad (9.9)$$

mit

$$a = -\alpha_0 + i\beta_0, \quad (9.10)$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (9.11)$$

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}\,|U_1 - U_2|}{\lambda_1}. \quad (9.12)$$

Da $h^+(u,v)$ bzgl. u für jedes feste v aus $\mathrm{Re}(v) > \delta$ in $\mathrm{Re}(u) > \beta_1$ holomorph sein muß, haben wir zu untersuchen, wo die Stellen $u_1 = av$ und $u_2 = \bar{a}v$ liegen. Zeichnet man sich diese Stellen in der u-Ebene auf, so ergeben sich für die beiden Fälle

$$U_1 \neq U_2$$

bzw.,

$$U_1 = U_2 = U$$

folgende Bilder:

Für $U_1 \neq U_2$:

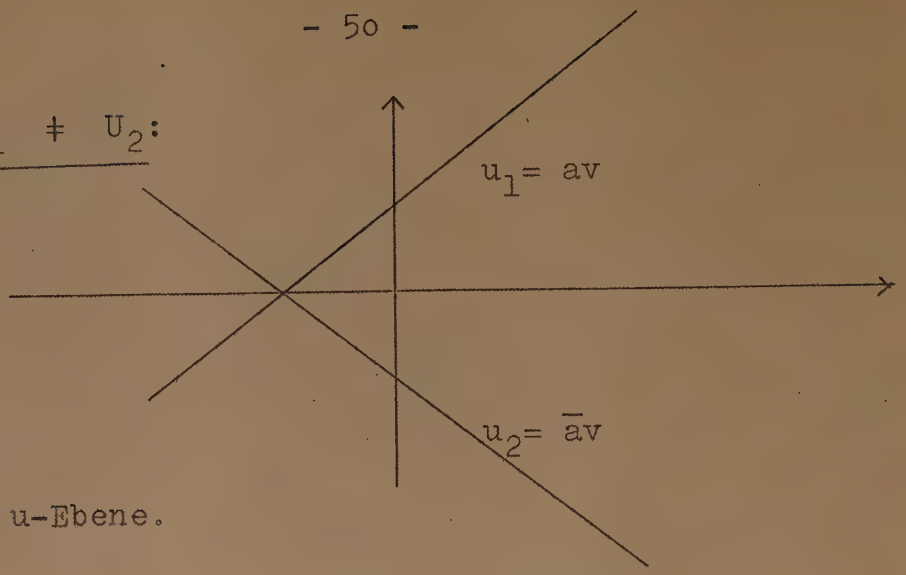

Bild 5. u-Ebene.

Für $U_1 = U_2 = U$:

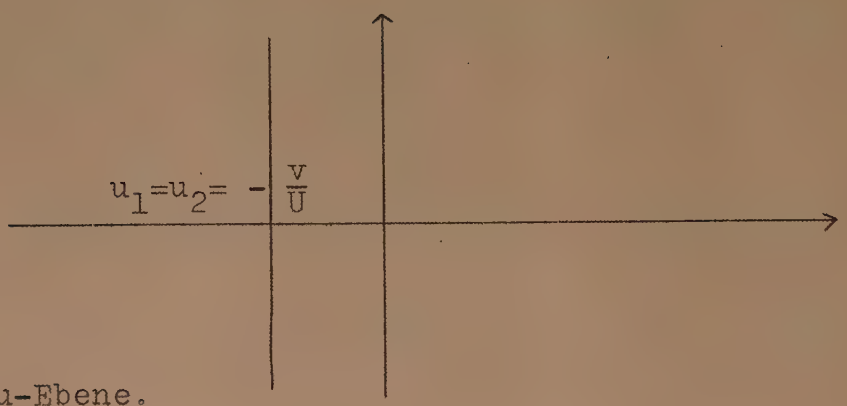

Bild 6. u-Ebene.

D.h. also für $U_1 \neq U_2$ gibt es keine rechte halbebene in der u-Ebene, in der keine u_1- bzw. u_2-Stellen liegen, oder anders ausgedrückt, in (9.8) gibt es immer Pole $u_1 = av$, $u_2 = \bar{a}v$. Damit diese nicht auftreten, müssen im Zähler an diesen Stellen Nullstellen sein. Dies liefert uns zwei Bedingungen zur Bestimmung von $h_0^+(u)$ und $\dot{h}_0^+(u)$ im Falle $U_1 \neq U_2$.

Für $U_1 = U_2 = U$ liegt bei $u = -\frac{v}{U}$ eine Doppelnullstelle, d.h. in (9.8) ein Doppelpol. Wegen $\mathrm{Re}(v) > \delta$ ist dann $h^+(u,v)$ in diesem Fall für $\mathrm{Re}(u) > -\frac{\delta}{U}$ holomorph. Da $h^+(u,v)$ bzgl. u in $\mathrm{Re}(u) > \beta_1$ holomorph sein muß, müssen wir voraussetzen, daß

$$-\frac{\delta}{U} \leq \beta_1 \qquad (9.13)$$

gilt, und dies später noch in § 11 ,(11.31) ff., beweisen. In diesem Falle haben wir nun keine Bedingungen zur Bestimmung von $h_0^+(u)$ und $\dot{h}_0^+(u)$. Wir können sie also hier frei wählen.

Wir werden sie sinnvoll identisch Null setzen, denn sie bedeuten ja Anfangsauslenkung - bzw. Anfangsgeschwindigkeit der Wirbelfläche H(x,t). Da wir aber hier gleiche Grungeschwindigkeiten in beiden Gebieten haben, wollen wir annehmen, daß zum Zeitpunkt t = o noch keine Wirbelschicht da ist, also auch nicht ausgelenkt werden kann.

Wegen

$$2\lambda_2 = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\bar{a}}\right)\cdot\lambda_3, \tag{9.14}$$

liefern die beiden Bedingungen für $U_1 \neq U_2$, wenn man also den Zähler von (9.8) für $v = \frac{u}{a}$ bzw. $v = \frac{u}{\bar{a}}$ gleich Null setzt, die Gleichungen:

$$\dot{h}_o^+(u) - \frac{u}{\bar{a}}\, h_o^+(u) = \frac{1}{\lambda_3 k^+(u)}\, m^+(u,\frac{u}{a}), \tag{9.15}$$

$$\dot{h}_o^+(u) - \frac{u}{a}\, h_o^+(u) = \frac{1}{\lambda_3 k^+(u)}\, m^+(u,\frac{u}{\bar{a}}). \tag{9.16}$$

Für $U_1 \neq U_2$ ist $a \neq \bar{a}$, und das Gleichungssystem ist für $Re(u) > \beta_1$ immer lösbar. Setzen wir noch

$$\frac{a\bar{a}}{\lambda_3(a - \bar{a})} = c, \quad (\text{ c rein imaginär }), \tag{9.17}$$

so ergibt sich:

$$h_o^+(u) = c\, \frac{1}{u\cdot k^+(u)} \left\{ m^+(u,\frac{u}{\bar{a}}) - m^+(u,\frac{u}{a}) \right\}, \tag{9.18}$$

$$\dot{h}_o^+(u) = c\, \frac{1}{k^+(u)} \left\{ \frac{1}{\bar{a}}\, m^+(u,\frac{u}{\bar{a}}) - \frac{1}{a}\, m^+(u,\frac{u}{a}) \right\}. \tag{9.19}$$

Es bleibt dabei noch zu zeigen, daß $m^+(u,\frac{u}{a})$ und $m^+(u,\frac{u}{\bar{a}})$ in $Re(u) > \beta_1$ holomorph sind. Dies wird im Anhang gezeigt.

Setzt man nun für $U_1 \neq U_2$ (9.9), (9.18) und (9.19) in (9.8) ein, so erhält man:

$$h^+(u,v) = \frac{c}{\lambda_1(u - av)(u - \bar{a}v)k^+(u)} \left\{ \frac{(2\lambda_2 u + \lambda_3 v)}{u} (m^+(u,\frac{u}{\bar{a}}) - m^+(u,\frac{u}{a})) \right.$$

$$\left. + \lambda_3 \left(\frac{1}{\bar{a}}\, m^+(u,\frac{u}{\bar{a}}) - \frac{1}{a}\, m^+(u,\frac{u}{a}) \right) - m^+(u,v) \right\}$$

oder, nach einigen Umformungen:

$$h^+(u,v) = \frac{c}{u.k^+(u)}\left\{\frac{m^+(u,v) - m^+(u,\frac{u}{a})}{\frac{u}{a} - v} - \frac{m^+(u,v) - m^+(u,\frac{u}{a})}{\frac{u}{a} - v}\right\}. \qquad (9.2o)$$

Bezeichnen wir für $U_1 = U_2 = U$ $h^+(u,v)$ mit $h_o^+(u,v)$, so erhalten wir aus (9.8), wegen $h_o^+(u) \equiv \overset{\circ}{h}{}_o^+(u) \equiv o$:

$$h_o^+(u,v) = -\frac{1}{\lambda_3} \cdot \frac{m^+(u,v)}{(Uu + v)^2 k^+(u)} \qquad (9.21)$$

(9.2o) bzw. (9.21) stellen dann die eindeutigen Lösungen von "Problem B" im Bildraum dar.

§ 10 Die Urbilder von $h^+(u,v)$ und $h_o^+(u,v)$.

Zunächst wollen wir $h^+(u,v)$ rücktransformieren. Die Formel (9.20) deutet sofort auf die Anwendung des Faltungssatzes hin.

Wegen (8.12) hat die Funktion

$$k_o^+(u) \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{u.k^+(u)} \qquad (10.1)$$

in $\mathrm{Re}(u) > o$ für $|u| \to \infty$ ein Verhalten wie $O(u^{-\frac{1}{2}})$ und ist dort holomorph. Damit ist $k_o^+(u)$ Laplacetransformierte. Ihr Urbild $K_o^+(x)$ läßt sich wieder über die Residuenmethode berechnen. Es ergibt sich:

$$K_o^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k^+(o)} + \dfrac{\pi^2}{4} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^2 k^+(\tau_n)}{\tau_n^2} e^{-\tau_n x}, & x > o \\ \qquad\qquad (10.2) \\ o & x < o \end{cases}$$

mit

$$\tau_n = \sqrt{k^2 + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}}, \quad (n = 1,2,..). \qquad (10.3)$$

Man sieht sofort, wegen $k^+(o) \neq o$ und $k^+(o) \neq \infty$, daß

$$K_o^+(x) = O(1), \quad \text{für } x \to \infty. \qquad (10.4)$$

Für $x \longrightarrow +o$ zeigt man wie bei $K^+(x)$:

$$K_o^+(x) = O(x^{-\frac{1}{2}}), \quad \text{für } x \longrightarrow +o. \qquad (10.5)$$

Da $K_o^+(x)$ für alle $x \geq \varepsilon > o$ beschränkt ist und wegen (10.5), erhalten wir sofort eine Abschätzung der Art:

$$o < K_o^+(x) \leq \left(A + \frac{B}{\sqrt{x}}\right), \quad x > o, \qquad (10.6)$$

wobei A und B geeignete Konstanten sind.

Im Anhang wird gezeigt, daß die Urbilder von

$$\frac{m^+(u,v) - m^+(u,\frac{u}{a})}{\frac{u}{a} - v} \qquad (1o.7)$$

und

$$\frac{m^+(u,v) - m^+(u,\frac{u}{\bar{a}})}{\frac{u}{\bar{a}} - v} \qquad (1o.8)$$

durch

$$a \int_o^x M^+(x-\xi, t+a\xi)\,d\xi\,, \qquad (1o.9)$$

bzw.

$$\bar{a} \int_o^x M^+(x-\xi, t+\bar{a}\xi)\,d\xi \qquad (1o.1o)$$

gegeben sind.

Damit kennen wir die Urbilder der einzelnen Faktoren von (9.2o). Um H(x,t) explizit anzugeben, brauchen wir nur noch den Faltungssatz bzgl. x anzuwenden. Mit (1o.2), (1o.9) und (1o.1o) erhalten wir dann aus (9.2o):

$$H(x,t) = c \int_o^x \int_o^\xi \left[\bar{a}\, M^+(\xi-\eta, t+\bar{a}\eta) - a\, M^+(\xi-\eta, t+a\eta) \right] K_o^+(x-\xi)\,d\eta\,d\xi\,. \qquad (1o.11)$$

Wir formen noch etwas um. Wir setzen zunächst

$$\xi - \eta = \tau\,, \quad d\eta = -\,d\tau\,,$$

vertauschen die Integrationsreihenfolge und setzen anschliessend

$$x - \xi = \sigma\,, \quad d\xi = -\,d\sigma\,.$$

Es ergibt sich

$$H(x,t) = c \int_o^x \int_o^{x-\tau} \Big[\bar{a}\, M^+(\tau, t+\bar{a}x-\bar{a}(\sigma+\tau)\,) - a\, M^+(\tau, t+ax-a(\sigma+\tau)\,) \Big] K_o^+(\sigma)\,d\sigma\,d\tau\,, \qquad (1o.12)$$

oder, wegen (9.17):

$$H(x,t) = -2|c|\,\mathrm{Im}\left\{ \int_0^x \int_0^{x-\tau} a\, M^+(\tau, t+ax-a(\sigma+\tau))\, K_0^+(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \right\}, \qquad (10.13)$$

wie man sich leicht überlegt, wenn man beachtet, daß $K_0^+(x)$ rein reell ist, und $M^+(x,t)$ für reelle $t \geqslant 0$ selbst reell ist.

Um $h_0^+(u,v)$ rückzutransformieren, schreiben wir (9.21) in der Form:

$$h_0^+(u,v) = \frac{1}{\left(u + \frac{v}{U}\right)^2}\, n^+(u,v) \qquad (10.14)$$

mit

$$n^+(u,v) = -\frac{1}{\lambda_3 U^2}\, \frac{m^+(u,v)}{k^+(u)}\,, \qquad (10.15)$$

oder mit (10.1):

$$n^+(u,v) = -\frac{1}{\lambda_3 U^2}\, u\left[m^+(u,v).k_0^+(u)\right]. \qquad (10.16)$$

Bezeichnen wir mit $N^+(x,t)$ das Urbild von $n^+(u,v)$, so ergibt sich über den Faltungssatz und den Differentiationssatz der eindimensionalen, einseitigen Laplacetransformation aus (10.16):

$$N^+(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_3 U^2}\, \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x M^+(\xi,t).K_0^+(x-\xi)\,d\xi, & x > 0,\ t \geqslant 0 \\ & \qquad (10.17) \\ 0 & x < 0,\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

In § 8, (c) haben wir gezeigt, daß $M^+(x,t)$ nach x einmal stetig differenzierbar ist. Hieraus ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x M^+(\xi,t) K_0^+(x-\xi)\,d\xi = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x M^+(x-\xi,t) K_0^+(\xi)\,d\xi =$$

$$= M^+(0,t) K_0^+(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} M^+(\xi,t) K_0^+(x-\xi)\,d\xi,$$

also:

$$N^+(x,t) = -\frac{1}{\lambda_3 U^2}\left\{ M^+(o,t)K_o^+(x) + \int_o^x \frac{\partial}{\partial \xi} M^+(\xi,t)K_o^+(x-\xi)\,d\xi \right. \tag{1o.18}$$

für $x > o$, $t \geqslant o$.

Aus (1o.18) ergeben sich mehrere Eigenschaften von $N^+(x,t)$. Einmal gilt wegen (1o.5)

$$N^+(x,t) = O(x^{-\frac{1}{2}}), \quad x \longrightarrow +o, \quad t \geqslant o. \tag{1o.19}$$

Weiter folgt aus (1o.18) und dem, was wir in § 8, (c) von $M^+(x,t)$ bewiesen haben, daß $N^+(x,t)$ für $x > o$ und $t \geqslant o$ zweimal stetig nach t differenzierbar ist, und daß

$$N^+(x,o) = o, \quad x > o, \tag{1o.2o}$$

ist.

Schließlich gilt noch für $N^+(x,t)$ und die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung nach t, folgende Abschätzung:

$$\left|N^+(x,t)\right| \leqslant (A_o + \frac{B_o}{\sqrt{x}})e^{-\alpha t}, \quad x > o, \quad t \geqslant o, \tag{1o.21}$$

mit geeigneten Konstanten A_o und B_o. Denn aus § 8, (c) wissen wir, daß

$$\left|M^+(o,t)\right| \leqslant C_o e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant o, \tag{1o.22}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} M^+(x,t)\right| \leqslant C.e^{-kx - \alpha t}, \quad x \geqslant o, \quad t \geqslant o, \tag{1o.23}$$

gilt. Mit Hilfe von (1o.6), (1o.18), (1o.22) und (1o.23) schätzen wir ab:

$$\left|N^+(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{\lambda_3 U^2}\left\{ \left|M^+(o,t)\right| K_o^+(x) + \int_o^x \left|\frac{\partial}{\partial \xi} M^+(\xi,t)\right| K_o^+(x-\xi)\,d\xi \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-\alpha t}}{\lambda_3 U^2}\left\{ C_o(A + \frac{B}{\sqrt{x}}) + C \int_o^x e^{-k\xi}(A + \frac{B}{\sqrt{x-\xi}})\,d\xi \right\}. \tag{1o.24}$$

Aus (lo.24) folgt sofort (lo.21), wenn man beachtet, daß das Integral für $x \geqslant o$ beschränkt bleibt. Für die Ableitungen nach t zeigt man die Abschätzung (lo.21) genauso.

Im Anhang wird gezeigt, daß das Urbild von

$$h_o^+(u,v) = \frac{1}{\left(u + \frac{v}{U}\right)^2}\, n^+(u,v) \qquad (lo.25)$$

gleich

$$H_o(x,t) = U^2 \int_o^t \tau\, N^+(x-U\tau, t-\tau)\, d\tau \qquad (lo.26)$$

ist.

Wir formen noch um. Seien

$$x-U\tau = \sigma, \quad d\tau = -\frac{1}{U}\, d\sigma,$$

so ergibt sich:

$$H_o(x,t) = \int_{x-Ut}^{x} (x-\sigma) N^+(\sigma, t - \frac{x-\sigma}{U})\, d\sigma. \qquad (lo.27)$$

Beachten wir noch, daß $N^+(x,t)$ für $x < o$ verschwindet, so erhalten wir schließlich:

$$H_o(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{x-Ut}^{x} (x-\sigma) N^+(\sigma, t - \frac{x-\sigma}{U})\, d\sigma, & o \leq t \leq \frac{x}{U}, \\ \displaystyle\int_{o}^{x} (x-\sigma) N^+(\sigma, t - \frac{x-\sigma}{U})\, d\sigma, & \frac{x}{U} \leq t. \end{cases} \qquad (lo.28)$$

§ 11 Verifikation der Lösung von "Problem B".

Wir behandeln zunächst den Fall $U_1 \neq U_2$. Wir haben zu zeigen, daß $H(x,t)$ das "Problem B" löst. Es genügt zu zeigen, daß $H(x,t) \in \mathfrak{H}$ ist. (s. Definition 3)

Wir benutzen dazu die Darstellung (1o.12):

$$H(x,t) = c \int_0^x \int_0^{x-\tau} \left[\bar{a}\, M^+(\tau, t+\bar{a}x-\bar{a}(\sigma+\tau) - a\, M^+(\tau, t+ax-a(\sigma+\tau)\right] K_0^+(\sigma)\, d\sigma\, d\tau. \qquad (11.1)$$

Wir zeigen nacheinander, daß $H(x,t)$ die Eigenschaften (a) bis (e) von Definition 3 hat.

Zu (a):

$H(x,t)$ ist in $x \geqslant o$ und $t \geqslant o$ definiert, wie man sofort sieht.

In § 8, (c) haben wir gezeigt, daß $M^+(x,t)$ bzgl. t für $t \geqslant o$ und jedes $x \geqslant o$ zweimal stetig differenzierbar ist. Hieraus ergibt sich sofort, daß $H(x,t)$ für $x \geqslant o$ und $t \geqslant o$ nach t zweimal stetig differenzierbar ist.

Zu (b):

Bzgl. x bilden wir für $x > o$ die Ableitungen explizit. Es ergeben sich:

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x,t) = c(\bar{a}-a) \int_0^x M^+(\tau,t) K_0^+(x-\tau)\, d\tau +$$

$$+ c \int_0^x \int_0^{x-\tau} \left[\bar{a} \frac{\partial}{\partial x} M^+(\tau, t+\bar{a}x-\bar{a}(\sigma+\tau)\ ) - a \frac{\partial}{\partial x} M^+(\tau, t+ax-a(\sigma+\tau)\right] K_0^+(\sigma)\, d\sigma\, d\tau\,, \qquad (11.2)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x,t) = c(\bar{a}-a) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x M^+(\tau,t) K_0^+(x-\tau)\, d\tau +$$

$$+ c(\bar{a}^2 - a^2) \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} M^+(\tau,t) K_0^+(x-\tau)\, d\tau +$$

$$+ c \int_0^x \int_0^{x-\tau} \Big[\bar{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} M^+(\tau, t+\bar{a}x-\bar{a}(\sigma+\tau)) - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} M^+(\tau, t+ax-a(\sigma+\tau)) \Big] K_0^+(\sigma) d\sigma d\tau . \quad (11.3)$$

Aus (11.2) sieht man, daß $H_x(x,t)$ für $x \geq o$ und $t \geq o$ stetig ist.

In (11.3) sind die letzten beiden Terme für $x \geq o$ und $t \geq o$ stetig. Das erste Integral ist aber nach (1o.17) für $x > o$ und $t \geq o$ bis auf einen Faktor gleich $N^+(x,t)$ und darum für $x > o$, $t \geq o$ stetig und hat für $x \longrightarrow +o$ das Verhalten (1o.19).

Zu (c):

Wir werden die Abschätzung (1.38) nur für $H(x,t)$ explizit zeigen. Für die Ableitungen zeigt man sie analog.

Aus (8.34) ergibt sich leicht für $\sigma \geq o$, $\tau \geq o$, $x \geq o$ und $t \geq o$ die Abschätzung:

$$\Big| \bar{a} M^+(\tau, t+\bar{a}x-\bar{a}(\sigma+\tau)) - a M^+(\tau, t+ax-a(\sigma+\tau)) \Big| \leq$$

$$\leq M e^{-k\tau - \alpha(t-\alpha_0 x) - \alpha\alpha_0(\sigma+\tau)} , \quad (11.4)$$

wobei M eine Konstante ist, und $a = -\alpha_0 + i\beta_0$ eingesetzt wurde.

Mit (1o.6) und (11.4) können wir für $x \geq o$ und $t \geq o$ abschätzen:

$$\Big| H(x,t) \Big| \leq M e^{-\alpha(t-\alpha_0 x)} \int_0^x \int_0^{x-\tau} e^{-k\tau - \alpha\alpha_0(\sigma+\tau)} \Big(A + \frac{B}{\sqrt{\sigma}}\Big) d\sigma d\tau . \quad (11.5)$$

Wir unterscheiden bzgl. α zwei Fälle.

(1) $\alpha > o$:

In diesem Fall können wir das Integral in (11.5) durch eine Konstante abschätzen für alle $x \geq o$, wenn wir beachten, daß dann wegen der Exponentialfunktion das Integral auch existiert, wenn $x \longrightarrow \infty$ strebt.

Wir erhalten also

$$\left|H(x,t)\right| \leq M_0 e^{-\alpha t + \alpha\alpha_0 x}, \quad x \geq 0,\ t \geq 0, \tag{11.6}$$

falls $\alpha > 0$ ist.

Wir sind nun in der Lage, die unbekannten Parameter β_1 und δ im Falle $\alpha > 0$ anzugeben. Aus (11.6) sehen wir, daß

$$\beta_1 = \alpha \cdot \alpha_0 , \tag{11.7}$$

$$\delta = -\alpha , \tag{11.8}$$

gesetzt werden können, wie schon in § 1 erwähnt wurde.

(2) $\alpha = 0$:

In diesem Falle schätzen wir das Integral in (11.5) ab:

$$\int_0^x \int_0^{x-\tau} (A + \frac{B}{\sqrt{\sigma}}) e^{-k\tau} \, d\sigma d\tau =$$

$$= A \int_0^x (x-\tau) e^{-k\tau} \, d\tau + 2B \int_0^x \sqrt{x-\tau}\, e^{-k\tau} \, d\tau \leq$$

$$\leq (A \cdot x + 2B\sqrt{x}) \int_0^x e^{-k\tau} \, d\tau \leq (A_0 x + B_0 \sqrt{x}), \tag{11.9}$$

wobei A_0 und B_0 geeignete Konstanten sind. Aus (11.5) folgt dann insgesamt, daß wir im Falle $\alpha = 0$ die Größe $\beta_1 > 0$ beliebig klein wählen können und $\delta = 0$ setzen dürfen.

Zu (d):

Man zeigt die Eigenschaft (d) ähnlich wie (c), indem man noch benutzt, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(x,t) = O(x^{-\frac{1}{2}}) \tag{11.10}$$

für $t \geq 0$ ist. Dies ergibt sich sofort aus dem ersten Integral der Gleichung (11.3), welches bis auf einen konstanten Faktor die Funktion $N^+(x,t)$ darstellt. Diese hat nach (10.19) ein solches Verhalten.

Zu (e):

Die Eigenschaft (e) ergibt sich sofort aus (11.1) und (11.2).

Damit gehört $H(x,t)$ zur Klasse $\mathfrak{H}$ und löst also das "Problem B".

Wir haben schließlich noch für den Fall $U_1 = U_2 = U$ zu zeigen, daß die Funktion $H_o(x,t)$ das "Problem B" löst.

Wir benutzen dazu die Darstellung (10.28). Wir haben auch hier zu zeigen, daß $H_o(x,t) \in \mathfrak{H}$ ist, und daß

$$H_o(x,o) \equiv \frac{\partial}{\partial t} H_o(x,o) \equiv o, \quad x \geqslant o, \tag{11.11}$$

gilt, was wir zusätzlich gefordert haben.

Zu (a) und (b):

$H_o(x,t)$ ist für $x \geqslant o$, $t \geqslant o$ definiert, wie man sofort aus (10.28) sieht. Wir bilden für $o \leqslant t < \frac{x}{U}$ bzw. $o < \frac{x}{U} < t$ die auftretenden partiellen Ableitungen. Dabei wird (10.20) berücksichtigt und die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $N^+(x,t)$ nach t, die wir in § 10 bewiesen haben. Vergleicht man dann die entsprechenden Ableitungen miteinander, so sieht man, daß jeweils die ersten Ableitungen auch an der Stelle $x = Ut$ stetig sind. Die zweiten Ableitungen haben dort im allgemeinen eine Unstetigkeitsstelle, falls

$$\frac{\partial}{\partial t} N^+(x,o) \neq o$$

ist. Es treten nämlich für $t < \frac{x}{U}$ in den zweiten Ableitungen Terme der Form

$$\text{const.}\, t \frac{\partial}{\partial t} N^+(\sigma, t - \frac{x-\sigma}{U}) \Big|_{\sigma = x-Ut} \tag{11.12}$$

auf, die für $\frac{x}{U} < t$ nicht auftreten. Ist also (11.12) von Null verschieden, so hat $H_o(x,t)$ keine stetigen Ableitungen zweiter Ordnung, gehört also nicht mehr zur Klasse $\mathfrak{H}$. Darum erweitern wir in diesem Falle die Klasse $\mathfrak{H}$, indem wir sol-

che Unstetigkeiten zulassen, die ja noch integrabel sind, wie man sieht, wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} N^+(x-Ut,t) = O\left((x-Ut)^{-\frac{1}{2}} \right) \qquad (11.13)$$

ist für $Ut \longrightarrow x$, wie wir früher gezeigt haben. Bei dieser Wahl der Klasse $\mathcal{G}$ gelten unsere bisherigen Rechnungen ausnahmslos. Wir wollen in diesem Fall die Funktionenklasse mit $\mathcal{G}_0$ bezeichnen. Sie soll also aus allen Funktionen $H_0(x,t)$ bestehen, welche die gleichen Eigenschaften haben, wie die Funktionen der Klasse $\mathcal{G}$, außer daß wir die eben erwähnten Unstetigkeiten in den zweiten Ableitungen zulassen.

Zu (c):

Wir werden wieder wie im Falle $U_1 \neq U_2$ die Abschätzung (1.38) nur für $H_0(x,t)$ zeigen, da die Abschätzungen für die Ableitungen wieder analog gehen. (In den zweiten Ableitungen hat man dabei noch die Singularität zu beachten.)

Um $H_0(x,t)$ abzuschätzen, benutzen wir die Formeln (1o.28) und (1o.21).

Für $o \leq t \leq \frac{x}{U}$ erhalten wir:

$$\left| H_0(x,t) \right| \leq \int_{x-Ut}^{x} (x-\sigma) \left| N^+(\sigma, t-\tfrac{x-\sigma}{U}) \right| d\sigma \leq$$

$$\leq e^{-\alpha(t-\frac{x}{U})} \int_{x-Ut}^{x} (x-\sigma)\left(A_0 + \frac{B_0}{\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma =$$

$$= e^{-\alpha(t-\frac{x}{U})} \left\{ A_0 \int_{x-Ut}^{x} (x-\sigma) e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma + \right.$$

$$\left. + B_0 \int_{x-Ut}^{x} \frac{x-\sigma}{\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma \right\}$$

$$\leq e^{-\alpha t + \frac{\alpha x}{U}} \left\{ A_0 x \int_{x-Ut}^{x} e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma + B_0 x \int_{x-Ut}^{x} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma \right\}$$

Wir integrieren im letzten Integral partiell und schätzen

zugleich ab:

$$\left|H_o(x,t)\right| \leq e^{-\alpha t + \frac{\alpha x}{U}} \left\{ (A_o + 2\frac{\alpha B_o}{U}\sqrt{x}).x \int_{x-Ut}^{x} e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma + \right.$$

$$\left. + 2B_o x.\sqrt{x}\,(1 + e^{\alpha t})e^{-\frac{\alpha}{U}x} \right. . \qquad (11.14)$$

Wir müssen wieder unterscheiden, ob $\alpha > o$ oder $\alpha = o$ ist.

(1) $\alpha > o$:

Aus (11.14) folgt, wenn man das Integral dort ausrechnet:

$$\left|H_o(x,t)\right| \leq x(A + B\sqrt{x})e^{-\alpha t} + x(C + D\sqrt{x}) \qquad (11.15)$$

für $o \leq t \leq \frac{x}{U}$, wobei A, B, C und D geeignete Konstanten sind.

Für $o \leq \frac{x}{U} \leq t$ erhalten wir aus (1o.28) und (1o.21):

$$\left|H_o(x,t)\right| \leq \int_o^x (x-\sigma)\left|N^+(\sigma, t - \tfrac{x-\sigma}{U})\right| d\sigma \leq$$

$$\leq xe^{-\alpha t + \frac{\alpha}{U}x} \int_o^x (A_o + \frac{B_o}{\sqrt{\sigma}})e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma. \qquad (11.16)$$

Wir machen die rechte Seite von (11.16) wegen $\frac{x}{U} \leq t$ am größten, wenn wir $x = Ut$ setzen. Dann ergibt sich:

$$\left|H_o(x,t)\right| \leq Ut \int_o^{Ut} (A_o + \frac{B_o}{\sqrt{\sigma}})e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma. \qquad (11.17)$$

Damit erhalten wir für $o \leq \frac{x}{U} \leq t$:

$$\left|H_o(x,t)\right| \leq Ut \int_o^{\infty} (A_o + \frac{B_o}{\sqrt{\sigma}})e^{-\frac{\alpha}{U}\sigma} d\sigma = \text{const.} \cdot t. \qquad (11.18)$$

(2) $\alpha = o$:

In diesem Falle ergibt sich aus (11.14):

$$\left|H_o(x,t)\right| \leq x(A_o Ut + 4B_o\sqrt{x}) \qquad (11.19)$$

für $o \leq t \leq \frac{x}{U}$.

Für $o \leq \frac{x}{U} \leq t$ ergibt sich aus (11.17):

$$\left| H_o(x,t) \right| \leq A.t^2 + B.t\sqrt{t} \qquad (11.2o)$$

mit geeigneten Konstanten A und B.

Aus (11.15), (11.18), (11.19) und (11.2o) ergibt sich, daß im Falle $U_1 = U_2 = U$ die Parameter β_1 und δ beide grösser Null, aber beliebig klein gewählt werden dürfen. (Hiermit ist aber auch der Nachweis von (9.13) erbracht.)

Zu (d):

(d) zeigt man wie im Falle $U_1 \neq U_2$.

Zu (e):

(e) ergibt sich sofort aus (1o.28) bzw. aus der Ableitung von (1o.28) nach x.

Schließlich müssen wir noch (11.11) nachweisen. Dies erhält man aus (1o.28) und der Ableitung von (1o.28) nach t.

Damit haben wir gezeigt, daß $H_o(x,t)$ zur Klasse $\mathcal{G}_o$ gehört.

Um unser ursprünglich dreidimensional formuliertes Problem zu lösen, brauchen wir nur alle erhaltenen Funktionen in die entsprechenden Formeln von § 1 einzusetzen.

Im Falle $U_1 = U_2 = U$ können wir auf die Frage nach der Stabilität eine Antwort geben. Durch spezielle Wahl von F(x,t) läßt sich zeigen, daß $H_o(x,t)$ unbeschränkt werden kann, falls x und t gleichzeitig gegen unendlich streben. Es ergibt sich hier lineare Instabilität, wie die Abschätzung (11.18) auch vermuten läßt. Diese lineare Instabilität hat schon RAYLEIGH bei der unendlich ausgedehnten Wirbelschicht berechnet und damit das Flattern von Segeln im Wind erklärt.(s.LAMB [7], §232)

Schlußbemerkung.

Nehmen wir an, daß wir unser Problem unter den gleichen Verhältnissen betrachten, aber für den kompressiblen Fall, so müssen unsere gesuchten Funktionen dieselben Gleichungen (1.25) bis (1.28) erfüllen, wobei nur (1.25) durch die Gleichung

$$(\Delta - k^2)\,\phi_j(x,y,t) = \frac{1}{a_j^2}\left(U_j\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi_j$$

ersetzt wird. a_j sind die entsprechenden Schallgeschwindigkeiten.

Hieraus sehen wir, daß rein formal gewisse Aussichten bestehen, unser im inkompressiblen Fall entwickeltes Lösungsverfahren auf den kompressiblen Fall zu übertragen. Die Hauptschwierigkeiten, die dabei auftreten, liegen in der Faktorisierung des Kernes der WIENER-HOPF-Gleichung.

Auch der Fall, daß die Düse ein kreisrundes Rohr ist, wird prinzipiell im inkompressiblen- wie im kompressiblen Fall mit unserer Methode gelöst werden können. Die Rechnungen werden nur wesentlich komplizierter, da Besselfunktionen auftreten.

A n h a n g.

Wir haben noch gewisse Funktionen rückzutransformieren. Dazu benötigen wir folgendes Lemma. (Es werden alle früheren Bezeichnungen in der gleichen Bedeutung wieder verwandt.)

L e m m a.

Voraussetzung:

F(t) sei in W_o holomorph und in $\overline{W}_o$ stetig mit eventueller Ausnahme von $t = \infty$. In $\overline{W}_o$ gelte

$$\left|F(t)\right| \leq A.e^{-\alpha \mathrm{Re}(t)} \quad , \alpha > o, \quad t \in \overline{W}_o, \qquad (1)$$

wobei A eine positive Konstante ist.

Behauptung:

1. Die einseitigen Laplacetransformierten der Funktionen

$$F_1(t) = F(at), \quad F_2(t) = F(\bar{a}t), \quad (a = -\alpha_o + i\beta_o)$$

konvergieren absolut in $\mathrm{Re}(u) > \alpha\alpha_o$.

2. Wenn f(u) die Transformierte von F(t) ist, so gilt

$$f_1(u) = \frac{1}{a} f(\frac{u}{a}), \quad f_2(u) = \frac{1}{a} f(\frac{u}{\bar{a}}),$$

wobei $f_1(u)$, $f_2(u)$ die Transformierten von $F_1(t)$, $F_2(t)$ sind.

Beweis:

Zu 1.

Wir bilden

$$f_1(u) = \int_o^\infty F(a\tau)e^{-u\tau}d\tau = \int_o^\infty e^{-(u-\alpha\alpha_o)\tau}.F(a\tau)e^{-\alpha\alpha_o\tau}d\tau . \qquad (2)$$

Wegen $a = -\alpha_o + i\beta_o$ und (1) folgt:

$$\left|F(a\tau)\right| e^{-\alpha\alpha_0\tau} \leq A.e^{-\alpha \mathrm{Re}(a\tau)}.e^{-\alpha\alpha_0\tau} = A.$$

Damit existiert aber (2) absolut für $\mathrm{Re}(u) > \alpha\alpha_0$, womit die Behauptung 1. für $f_1(u)$ bewiesen ist. Für $f_2(u)$ beweist man die Aussage analog.

Zu 2.

Aus (1) folgt zunächst, daß $f(u)$ in $\mathrm{Re}(u) > -\alpha$ holomorph ist. Damit ist

$$\frac{1}{a} f\left(\frac{u}{a}\right) \quad \text{in} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{u}{a}\right) > -\alpha \qquad (3)$$

holomorph. Setzen wir $u = \sigma + i\tau$, so folgt aus $\mathrm{Re}\left(\frac{u}{a}\right) > -\alpha$:

$$\tau > \frac{\alpha_0}{\beta_0}\sigma - \frac{\alpha_0^2 + \beta_0^2}{\beta_0}\alpha. \qquad (4)$$

Wir setzen voraus, daß $\beta_0 > 0$ ist. (Für $\beta_0 = 0$ fällt unser Lemma mit dem bekannten "Ähnlichkeitssatz" zusammen. Siehe DOETSCH [3] , S. 16, Regel IV.)

Durch (4) wird also das Holomorphiegebiet von $\frac{1}{a} f\left(\frac{u}{a}\right)$ beschrieben. Es ist die Halbebene, die über der Geraden

$$\tau = \frac{\alpha_0}{\beta_0}\sigma - \frac{\alpha_0^2 + \beta_0^2}{\beta_0}\alpha$$

liegt. Diese Halbebene hat mit der Halbebene $\mathrm{Re}(u) > \alpha\alpha_0$ einen Winkelbereich gemeinsam. (S. Bild 7) In diesem Winkelbereich liegt der Strahl

$$\tau = 2\frac{\alpha_0}{\beta_0}\sigma, \qquad \sigma > \alpha\alpha_0. \qquad (5)$$

Wenn wir zeigen können, daß auf diesem Strahl, der in dem gemeinsamen Holomorphiegebiet von $f_1(u)$ und $\frac{1}{a} f\left(\frac{u}{a}\right)$ liegt, $f_1(u) = \frac{1}{a} f\left(\frac{u}{a}\right)$ ist, so können wir durch analytische Fortsetzung schließen, daß diese Beziehung für alle u mit $\mathrm{Re}(u) > \alpha\alpha_0$ richtig ist.

Dies wollen wir nun zeigen. Wir bilden

$$f_1(u) = \int_0^\infty F(at)e^{-ut}dt = \frac{1}{a}\int_0^{a\cdot\infty} F(\tau)e^{-\frac{u}{a}\tau}d\tau. \qquad (6)$$

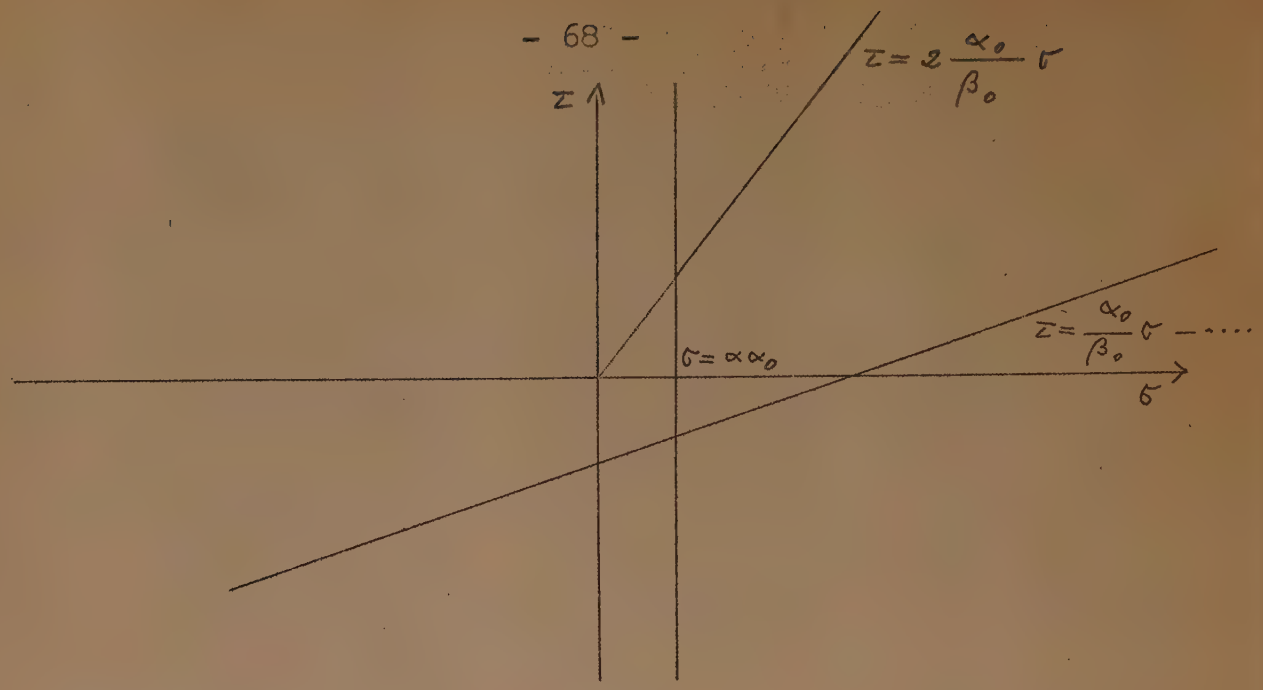

Bild 7: u-Ebene.

Wir wollen zeigen, daß wir in (6) in dem Integral rechts für

$$u = \left(1 + 2\frac{\alpha_0}{\beta_0} i\right)\sigma \quad , \quad \sigma > \alpha\alpha_0, \tag{7}$$

den Integrationsweg auf $0 \le \tau < \infty$ deformieren können, sodaß

$$f_1(u) = \frac{1}{a}\int_0^\infty F(\tau) e^{-\frac{u}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} f\left(\frac{u}{a}\right) \tag{8}$$

dort gilt. Ist dies gezeigt, so folgt durch analytische Fortsetzung sofort unsere Behauptung.

Wir bilden folgendes Integral für u aus (7):

$$\int_{\mathcal{L}} F(t) e^{-\frac{u}{a}t} dt = \int_{\mathcal{L}_1} + \int_{\mathcal{L}_2} + \int_{\mathcal{L}_3} = 0, \tag{9}$$

wobei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ der in Bild 8 eingezeichnete Weg ist.

(9) gilt, da unter unseren Voraussetzungen über F(t) der CAUCHYsche Integralsatz gilt. Wenn wir gezeigt haben, daß das Teilintegral über den Weg $\mathcal{L}_2$ für $r \to \infty$ verschwindet, so haben wir alles bewiesen.

Auf $\mathcal{L}_2$ gilt:

$$t = \frac{\alpha_0 - a}{2\alpha_0}\xi + i\frac{\beta_0}{2} r, \quad -\alpha_0 r \le \xi \le \alpha_0 r. \tag{10}$$

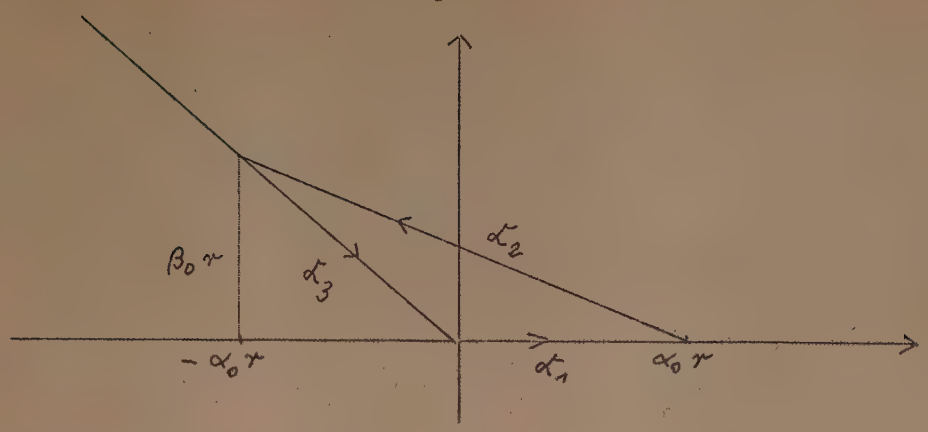

Bild 8: Komplexe t-Ebene.

Wir schätzen das Integral über α_2 ab, indem wir (1), (7) und (1o) einsetzen:

$$\left| \int_{\alpha_2} F(t) e^{-\frac{u}{a} t} dt \right| \leq \int_{\alpha_2} |F(t)| \; e^{-\mathrm{Re}(\frac{u}{a} t)} |dt| \leq$$

$$\leq A \left| \frac{\alpha_o - a}{2\alpha_o} \right| \int_{-\alpha_o r}^{\alpha_o r} e^{-\mathrm{Re}\left[(\alpha + \frac{u}{a})t\right]} \, d\xi, \quad (11)$$

wobei t durch (1o) zu ersetzen ist. Wir setzen t ein und erhalten für

$$\mathrm{Re}\left[(\alpha + \frac{u}{a})t\right] = \mathrm{Re}\left[(\alpha + \frac{u}{a})\left(\frac{\alpha_o - a}{2\alpha_o}\xi + i\frac{\beta_o}{2} r\right)\right] =$$

$$= br + d\xi \quad (12)$$

mit

$$b = \frac{\beta_o}{2} \mathrm{Re}(i\frac{u}{a}); \quad (13)$$

$$d = \mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_o - a}{2\alpha_o}(\alpha + \frac{u}{a})\right]. \quad (14)$$

b und d rechnen wir weiter aus, indem wir für u (7) einsetzen. Es ergibt sich:

$$b = \frac{\beta_o}{2} \sigma \cdot \mathrm{Re}\left[\frac{i}{a}\left(1 + 2\frac{\alpha_o}{\beta_o} i\right)\right] =$$

$$= -\frac{\sigma}{2|a|^2} \mathrm{Re}\left[i(\alpha_o + i\beta_o)(\beta_o + 2\alpha_o i)\right] = \frac{2\alpha_o^2 + \beta_o^2}{2|a|^2} \sigma, \quad (15)$$

$$d = \mathrm{Re}\left[\frac{\alpha_o - a}{2\alpha_o}\left(\alpha + \frac{1 + 2\frac{\alpha_o}{\beta_o}i}{a}\sigma\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{2\alpha_o - i\beta_o}{2\alpha_o}\left(\alpha + \frac{(1 + 2\frac{\alpha_o}{\beta_o}i)\cdot\bar{a}}{|a|^2}\sigma\right)\right] =$$

$$= \alpha - \frac{\sigma}{2\alpha_o |a|^2}\,\mathrm{Re}\left[(2\alpha_o - i\beta_o)(1 + 2\frac{\alpha_o}{\beta_o}i)(\alpha_o + i\beta_o)\right] =$$

$$= \alpha - \frac{\sigma\beta_o^2}{2\alpha_o |a|^2}\,. \qquad (16)$$

Mit (12), (15) und (16) erhalten wir für das Integral auf der rechten Seite von (11):

$$\int_{-\alpha_o r}^{\alpha_o r} e^{-\mathrm{Re}\left[(\alpha + \frac{u}{a})\,t\right]}\,d\xi = \frac{e^{-br}}{d}\left(e^{-\alpha_o dr} - e^{\alpha_o dr}\right). \qquad (17)$$

Wenn wir gezeigt haben, daß die rechte Seite von (17) für $r \longrightarrow \infty$ verschwindet, sind wir fertig. D.h. wir müssen nur zeigen, daß

$$b \pm \alpha_o d > o \qquad (18)$$

ist für $\sigma > \alpha\alpha_o$.

Aus (15) und (16) folgt:

$$b \pm \alpha_o d = \frac{(2\alpha_o^2 + \beta_o^2)\sigma}{2|a|^2} \pm \alpha\alpha_o \mp \frac{\alpha_o \cdot \beta_o^2}{2\alpha_o |a|^2}\sigma$$

oder

$$b + \alpha_o d = \frac{\alpha_o^2}{|a|^2}\sigma + \alpha\alpha_o > o \qquad \text{für } \sigma > \alpha\alpha_o,$$

$$b - \alpha_o d = \sigma - \alpha\alpha_o > o \qquad \text{für } \sigma > \alpha\alpha_o,$$

womit für $f_1(u)$ unser Lemma bewiesen ist. Für $f_2(u)$ zeigt man es analog.

Wir können nun die Funktionen (1o.7) bzw. (1o.8) rücktransformieren. Explizit brauchen wir es nur für (1o.7) zu machen, da sich die entsprechende Formel für (1o.8) aus der für (1o.7) ergibt, wenn man a durch $\bar{a}$ ersetzt.

Sei

$$J(x,t) = a \int_0^x M^+(x-\xi, t+a\xi)\, d\xi \,, \qquad (19)$$

dann zeigen wir, daß

$$j(u,v) = \int_0^\infty \int_0^\infty J(x,t) e^{-ux - vt}\, dx dt \qquad (2o)$$

gleich der Funktion (1o.7) ist.

Wir setzen (19) in (2o) ein. Nach dem Satz von FUBINI dürfen wir die Integrationsreihenfolge beliebig vertauschen.

$$j(u,v) = a \int_0^\infty e^{-vt} dt \int_0^\infty d\xi \int_\xi^\infty M^+(x-\xi, t+a\xi) e^{-ux}\, dx =$$

$$= a \int_0^\infty e^{-vt} dt \int_0^\infty e^{-u\xi} d\xi \int_0^\infty M^+(\eta, t+a\xi) e^{-u\eta}\, d\eta =$$

$$= a \int_0^\infty e^{-vt} dt \int_0^\infty \overset{I}{M}{}^+(u, t+a\xi) e^{-u\xi}\, d\xi \,. \qquad (21)$$

In (21) wurden $x - \xi = \eta$ und

$$\overset{I}{M}{}^+(u, t+a\xi) = \int_0^\infty M^+(\eta, t+a\xi) e^{-u\eta}\, d\eta \qquad (22)$$

gesetzt. In (21) setzen wir $t + a\xi = \eta$, $d\xi = \frac{1}{a} d\eta$, und nehmen zunächst an, daß

$$\mathrm{Re}\left(\frac{u}{a} - v\right) < o \qquad (23)$$

ist. Von dieser Bedingung werden wir uns später wieder freimachen.

Wir erhalten:

$$j(u,v) = \int_0^\infty e^{(\frac{u}{a} - v)t}\, dt \int_t^{a\infty} \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-\frac{u}{a}\eta}\, d\eta =$$

$$= \int_0^\infty e^{(\frac{u}{a} - v)t}\, dt \int_0^{a\infty} \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-\frac{u}{a}\eta}\, d\eta -$$

$$- \int_0^\infty e^{(\frac{u}{a} - v)t}\, dt \int_0^t \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-\frac{u}{a}\eta}\, d\eta . \qquad (24)$$

Da die Funktion $M^+(x,t)$ bzgl. t für $x \geq o$ den Bedingungen unseres Lemmas genügt, wie wir in § 8, (c) gezeigt haben, gilt für

$$\int_0^{a\infty} \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-\frac{u}{a}\eta}\, d\eta ,$$

wenn wir $\eta = a\tau$ setzen,

$$\int_0^{a\infty} \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-\frac{u}{a}\eta}\, d\eta = a \int_0^\infty \overset{I}{M}{}^+(u,a\tau) e^{-u\tau}\, d\tau = m^+(u,\tfrac{u}{a}), \qquad (25)$$

falls wir unsere alte Bezeichnung $m^+(u,v)$ für das Bild von $M^+(x,t)$ benutzen.

Setzen wir (25) in (24) ein, so erhalten wir:

$$j(u,v) = m^+(u,\tfrac{u}{a}) \int_0^\infty e^{(\frac{u}{a} - v)t}\, dt -$$

$$- \int_0^\infty e^{(\frac{u}{a} - v)t}\, dt \int_0^t \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-\frac{u}{a}\eta}\, d\eta . \qquad (26)$$

Im letzten Integral in (26) vertauschen wir die Reihenfolge der Integration. Wegen (23) können wir in (26) dann die Integration bzgl. t ausführen und erhalten:

$$j(u,v) = -\frac{m^+(u,\frac{u}{a})}{\frac{u}{a} - v} + \frac{\int_0^\infty \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-v\eta}\, d\eta}{\frac{u}{a} - v},$$

oder, wegen

$$\int_0^\infty \overset{I}{M}{}^+(u,\eta) e^{-v\eta}\, d\eta = m^+(u,v)$$

gilt:

$$j(u;v) = \frac{m^+(u,v) - m^+(u,\frac{u}{a})}{\frac{u}{a} - v} \qquad (27)$$

Aus (27) ergibt sich nun sofort, daß wir uns von der Voraussetzung (23) freimachen können. Aus dem Lemma folgt, daß $m^+(u,\frac{u}{a})$ bzgl. der zweiten Variablen in $Re(u) > \alpha\alpha_o$ holomorph ist. Bzgl. der ersten Veränderlichen ist die Funktion, da $M^+(x,t)$ bzgl. x beschränkt ist, in $Re(u) > o$ holomorph. Damit haben wir also den noch fehlenden Beweis, daß $m^+(u,\frac{u}{a})$ in $Re(u) > \beta_1 = \alpha\alpha_o$ holomorph ist, auch erbracht. Insgesamt gilt (27) also in

$$Re(u) > \alpha\alpha_o, \quad Re(v) > \delta = -\alpha .$$

Vergleicht man (27) mit (1o.7), so folgt sofort unsere Behauptung. Beachten wir noch, daß unser Lemma auch für $\bar{a}$ (anstatt von a) gilt, so sieht man sofort, daß wir durch Ersetzen von a durch $\bar{a}$ aus (19) das Urbild von (1o.8) erhalten, und daß $m^+(u,\frac{u}{\bar{a}})$ ebenfalls in $Re(u) > \alpha\alpha_o$ holomorph ist.

Wir wollen noch die Rücktransformation von (1o.25):

$$h_o^+(u,v) = \frac{1}{(u + \frac{v}{U})^2} n^+(u,v) \qquad (28)$$

durchführen. Wir machen dies wieder direkt, indem wir zeigen, daß das Bild von

$$H_o(x,t) = U^2 \int_o^t \tau\, N^+(x-U\tau, t-\tau)\, d\tau \qquad (29)$$

durch (28) gegeben wird.

$$h_o^+(u,v) = U^2 \int_o^\infty \int_o^\infty \left(\int_o^t \tau\, N^+(x-U\tau, t-\tau)\, d\tau \right) e^{-ux - vt}\, dx dt. \qquad (3o)$$

Wir dürfen auch hier wieder die Integrationsreihenfolge vertauschen. Dies tun wir und setzen $t = \tau + \eta$, $dt = d\eta$:

$$h_o^+(u,v) = U^2 \int_0^\infty e^{-ux}dx \int_0^\infty \tau d\tau \int_\tau^\infty N^+(x-U\tau, t-\tau)e^{-vt}\, dt =$$

$$= U^2 \int_0^\infty e^{-ux}dx \int_0^\infty \tau\, e^{-v\tau}\, d\tau \int_0^\infty N^+(x-U\tau,\eta)e^{-v\eta}\, d\eta =$$

$$= U^2 \int_0^\infty e^{-ux}dx \int_0^\infty \tau \overline{\overline{N}}^{+}(x-U\tau,v)e^{-v\tau}\, d\tau\,, \qquad (31)$$

wobei

$$\overline{\overline{N}}^{+}(x-U\tau,v) = \int_0^\infty N^+(x-U\tau,\eta)e^{-v\eta}\, d\eta \qquad (32)$$

gesetzt wurde.

In (31) vertauschen wir wieder die Integrationsreihenfolge und setzen $x-U\tau = \xi$, $dx = d\xi$:

$$h_o^+(u,v) = U^2 \int_0^\infty \tau\, e^{-(v+Uu)\tau}\, d\tau \int_{-U\tau}^\infty \overline{\overline{N}}^{+}(\xi,v)e^{-u\xi}\, d\xi\,. \qquad (33)$$

Da $N^+(\xi,v) \equiv o$ für $\xi < o$, erhalten wir mit der alten Bezeichnung:

$$h_o^+(u,v) = U^2\, n^+(u,v) \int_0^\infty \tau\, e^{-(v+Uu)\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(u+\frac{v}{U})^2}\, n^+(u,v), \quad (\text{für } Re(u) > o,\ Re(v) > o\ ),$$

womit alles bewiesen ist.

Es sei schließlich noch gesagt, daß wir im Falle $U_1 = U_2 = U$ die Analytizität von $F(x,t)$ bzgl. t in W_o nicht benötigen, da wir dies nur bei der Rücktransformation von $h^+(u,v)$ brauchten.

Literaturangaben.

[1] BROMWICH : An introduction to the theory of infinite series. MacMillan, London, 1949.

[2] DOETSCH : Handbuch der Laplacetransformation. Bd. 1, Birkhäuser, Basel, 1950.

[3] DOETSCH : Handbuch der Laplacetransformation, Bd. 2.

[4] K.M. CASE : Proceedings of symposia in appl. math. Vol. 13, Amer. Math. Soc., 1962, S. 25 - 33.

[5] ERDELYI : Tables of integral transforms. Vol. 1 MacGraw Hill, 1954.

[6] HATANAKA : J. Soc. SCi. Culture 2, 3, 1949; zitiert durch Appl.Mech. Rev. 2, 897.

[7] LAMB : Lehrbuch der Hydrodynamik. Teubner, Leipzig, 1931.

[8] L. LANDAU : C. R. Acad. Sci. USSR 44. 139, 1944.

[9] LENNOX, PACK: J. Fluid Mech. Vol. 15, 1963, S. 513 -526.

[10] LIN : The theory of hydrodynamic stability. Cambridge, 1955.

[11] E. MEISTER : ZAMM Bd. 42, 1962, S. 9 - 31.

[12] J.W. MILES : J. Fluid Mech. Vol. 4, 1958, S. 538 - 552.

[13] NOBLE : Methods based on Wiener-Hopf-technique. Pergamon Press, 1958.

[14] PAI : J. Aero. Sci. 21, 325, 1954.

[15] PAI : Fluid dynamics of jets. Van Nostrand, New York, 1954.

[16] D. VOELKER, G. DOETSCH : Die zweidimensionale Laplacetransformation. Birkhäuser, Basel, 1950.

Weitere Literatur über "Compound jets" siehe in der Arbeit von LENNOX, PACK [9].

L e b e n s l a u f

Am 3. August 1936 wurde ich als Sohn des Fahrsteigers Leo Schorr und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Jolly, in Bildstock, Kreis Saarbrücken Land, geboren. Nach der Volksschule von 1942 bis 1947 besuchte ich das Staatliche humanistische Gymnasium in St. Wendel, wo ich 1956 die Reifeprüfung ablegte.

Ab S.S. 1956 bis Ende W.S. 1961 studierte ich an der Universität des Saarlandes Mathematik und Physik. Im April 1958 bestand ich die Diplomvorprüfung in Mathematik. Im April 1961 legte ich mit einer von Herrn Prof. Dr. H. SÖHNGEN angeregten Diplomarbeit über Eigenschaften der Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen das Diplomexamen ab.

Seit Mai 1961 bin ich Assistent am Mathematischen Institut bei Herrn Prof. Dr. H. SÖHNGEN, wo ich unter seiner Leitung meine Dissertation abschloß.

Ich bin verheiratet und habe eine Tochter.